Μαθηματικός Νομιναλισμός / Φιξιοναλισμός: Προβλήματα και Προοπτικές

Ψύλλος, Σ. και Χριστοπούλου, Δ.

Εισαγωγή

Το παρόν άρθρο αναφέρεται στο μαθηματικό *φιξιοναλισμό/νομιναλισμό,* όπως αρχικά υποστηρίχθηκε από τον Hartry Field και στις άλλες μορφές του οι οποίες διατυπώθηκαν από φιλοσόφους των μαθηματικών όπως ο Mark Balaguer και η Mary Leng. Ο σύγχρονος *νομιναλισμός*[1] υποστηρίζει την οντολογική αντιρεαλιστική θέση για τη μη ύπαρξη των αφηρημένων αντικειμένων. Ο όρος '*φιξιοναλισμός'* ή *'μυθοκρατία'* αναφέρεται επίσης στην οντολογική θέση σύμφωνα με την οποία, ένα είδος οιονεί αντικειμένων χαρακτηρίζονται ως φανταστικά, στη συγκεκριμένη περίπτωση τα μαθηματικά αντικείμενα θεωρούνται φανταστικά αντικείμενα (όπως πχ. είναι οι ήρωες των μύθων, των μυθιστορημάτων κλπ). Ο σύγχρονος *μαθηματικός νομιναλισμός* επιχειρεί την αποδυνάμωση και τελικά την κατάρριψη του γνωστού ως *επιχειρήματος του αναπόδραστου* των Quine & Putnam, ενός ρεαλιστικού επιχειρήματος που υποστηρίζει ότι τα (αφηρημένα) μαθηματικά αντικείμενα, όπως και οι μη παρατηρήσιμες φυσικές οντότητες είναι αναπόδραστες στη συγκρότηση και τη διατύπωση των επιστημονικών θεωριών, οι οποίες δεσμεύονται οντολογικά σε αυτές. Κατά συνέπεια, στο βαθμό που οι καλύτερες επιστημονικές θεωρίες μας περιγράφουν αληθώς τον κόσμο, πρέπει να δεχθούμε την οντολογική θέση για την ύπαρξη εξίσου των μαθηματικών οντοτήτων και των μη παρατηρήσιμων φυσικών οντοτήτων. Σε αυτό το άρθρο, θα παρουσιαστεί κατ' αρχάς η νομιναλιστική προσέγγιση του Field και η μεθοδολογία που χρησιμοποίησε για να καταρρίψει το *επιχείρημα του αναπόδραστου* στο πλαίσιο του νομιναλιστικού του προγράμματος, ενώ στη συνέχεια θα αναπτυχθούν ορισμένες διαφορετικές εκδοχές του μαθηματικού νομιναλισμού και θα επισημανθούν τα προβλήματα και οι δυσκολίες που αυτές αντιμετωπίζουν.

[1] Η μεσαιωνική αντίληψη του νομιναλισμού υποστήριζε τη μη ύπαρξη των *καθόλου όντων* ως διακριτών και αυθύπαρκτων οντοτήτων. Ο σύγχρονος νομιναλισμός αρνείται την ύπαρξη οποιουδήποτε αφηρημένου αντικειμένου.

Σημασιολογική θεώρηση

Σύμφωνα με την καθιερωμένη προσέγγιση στην αλήθεια, μια μαθηματική πρόταση είναι αληθής αν και μόνο αν δεδομένες καταστάσεις πραγμάτων είναι υπεύθυνες για την αλήθειά της. Έτσι, η πρόταση (1) «υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί» θεωρείται αληθής διότι άπειρες στο πλήθος οντότητες με συγκεκριμένες ιδιότητες (αφηρημένα αντικείμενα που είναι αριθμοί και μάλιστα πρώτοι) την καθιστούν αληθή. Με παρόμοιο τρόπο αντιμετωπίζουμε και τις προτάσεις άλλων περιοχών, πχ. «υπάρχουν ψήγματα χρυσού σε αυτό το κράμα». Η κυριολεκτική ανάγνωση μιας αληθούς πρότασης προϋποθέτει μια κατάσταση πραγμάτων (εκπεφρασμένη στο λεξιλόγιο της εν λόγω πρότασης) η οποία καθιστά την πρόταση αληθή.

Κατά συνέπεια, η καθιερωμένη προσέγγιση για την αλήθεια των μαθηματικών προτάσεων μας οδηγεί στην αναγνώριση της ύπαρξης μιας μαθηματικής πραγματικότητας, εκτός βέβαια εάν υιοθετήσουμε μια επαληθευσιοκρατική προσέγγιση που περιορίζεται σε εκδοχές της βεβαιωσιμότητας/επαληθευσιμότητας. Σε αυτή την περίπτωση, μια μαθηματική πρόταση θεωρείται αληθής όταν απλώς υπάρχει κάποιος αλγόριθμος που την επιβεβαιώνει. Αυτή η προσέγγιση είναι επιστημική και βασίζεται στη σημασιολογική αντίληψη του Michael Dummett περί αλήθειας ως εγγυημένης βεβαιωσιμότητας.

Ο Field υιοθετεί την καθιερωμένη σημασιολογική προσέγγιση αλλά η πρωτοτυπία της άποψής του έγκειται στο ότι θεωρεί τις μαθηματικές προτάσεις ψευδείς. Το ψεύδος της (1) οφείλεται στο ότι δεν υπάρχουν οντότητες με τα δεδομένα χαρακτηριστικά (αριθμοί, πρώτοι). Δεδομένου ότι α) ο Field αρνείται την ύπαρξη καταστάσεων πραγμάτων για τα μαθηματικά σχετικά με αριθμούς, σύνολα ή άλλα μαθηματικά αντικείμενα και β) δέχεται την καθιερωμένη σημασιολογική προσέγγιση, υποχρεούται να χαρακτηρίσει όλες τις υπαρκτικές μαθηματικές προτάσεις ως ψευδείς. Αλλά τι στάση κρατάει απέναντι στις μαθηματικές προτάσεις που δεν είναι υπαρκτικές; πχ. «ο δύο είναι άρτιος», «όλοι οι πρώτοι ακέραιοι διαιρούνται με τον εαυτό τους και τη μονάδα». Πιστεύει ότι οι τιμές αληθείας αυτών των προτάσεων είναι *κενές*. Αυτό δεν επηρεάζει την ισχύ των θεωρημάτων διότι τα μαθηματικά θεωρήματα αποδεικνύονται από τα αξιώματα μιας θεωρίας. Ο χαρακτηρισμός τους ωστόσο ως αληθών είναι *κενός*, δεδομένου ότι για τον Field δεν υπάρχουν τα μαθηματικά αντικείμενα που τα θεωρήματα αυτά περιγράφουν.

Αλλά ας εξετάσουμε πιο συστηματικά το θέμα της αλήθειας των μαθηματικών προτάσεων.

Έστω η πρόταση (1) «Υπάρχει ένα μήλο στο τραπέζι» και η πρόταση (2) «Ο αριθμός των μήλων στο τραπέζι είναι 1». Μπορούμε να γράψουμε την πρόταση (1) ως

(1΄) «$\exists x A(x) \wedge \forall y(A(y) \rightarrow y=x)$» , όπου A(x) : ‘x είναι μήλο στο τραπέζι’

Οι ποσοδείκτες στην πρόταση (1΄) είναι φανερό ότι δεν δρουν σε αριθμούς (αλλά σε μήλα) γι αυτό η πρόταση (1΄) δεν δεσμεύεται (οντολογικά) σε αριθμούς. Θα μπορούσε κανείς να σκεφτεί ότι μέσω της πρότασης (1΄) μπορεί να κατανοηθεί η πρόταση (2). Το πρόβλημα όμως είναι ότι η (2) δεσμεύεται στην ύπαρξη αριθμών αφού περιλαμβάνει τον όρο ‘ο αριθμός των μήλων’. Μπορούμε λοιπόν να υιοθετήσουμε τις ακόλουθες τέσσερις θέσεις απέναντι στο πρόβλημα της σχέσης μεταξύ (1) και (2).

Α) Η (2) έπεται από την (1). Εάν η (1) είναι αληθής τότε η (2) είναι αληθής. Όμως, αν η (2) αναγνωσθεί κυριολεκτικά, δεσμεύεται στην ύπαρξη του αριθμού 1. Επομένως, περνώντας από την (1) στη (2), υιοθετούμε μια πληθωριστική προσέγγιση στην οντολογία αυξάνοντας τις οντότητες του σύμπαντος, αφού προστίθεται ο αριθμός ένα στον οποίο δεσμεύεται η (2)). Πρόκειται ουσιαστικά για άποψη πλατωνικού χαρακτήρα που υπενθυμίζει την προτροπή του Frege στα *Grundlagen,* §*57*: κάθε αριθμητική πρόταση στην οποία η αριθμητική έκφραση συμπεριφέρεται ως επιθετικός προσδιορισμός δύναται και πρέπει να μετασχηματισθεί σε μια αριθμητική ταυτότητα όπου η ίδια αριθμητική έκφραση συμπεριφέρεται πλέον ως ενικός όρος. Σύμφωνα με τον Frege, η πρόταση (2) εκφράζει το πραγματικό status των φυσικών αριθμών ως αντικειμένων αναφοράς ενικών όρων που εμφανίζονται σε αληθείς αριθμητικές ταυτότητες.

Β) Μια δεύτερη στάση είναι να μην διαβάσουμε κυριολεκτικά την (2) και να θεωρήσουμε ότι η (2) ανάγεται στην (1). Πρόκειται για μια αναγωγιστική στάση. Η (2) δεν σημαίνει τίποτε άλλο περισσότερο απ’ ότι σημαίνει η (1). Αλλά η (1) δεν δεσμεύεται οντολογικά στην ύπαρξη αριθμών, παρά μόνον σε φυσικά γεγονότα. Κατά συνέπεια, ούτε και η (2) δεσμεύεται στην ύπαρξη αριθμών.

Γ) Μπορεί να υιοθετηθεί μια αναγωγιστική στάση αλλά προς την αντίθετη κατεύθυνση: Η (1) ανάγεται στη (2). Η (1), δηλαδή, σημαίνει ό,τι σημαίνει η (2). Αλλά η (2) δεσμεύεται οντολογικά στην ύπαρξη αριθμών. Υπάρχουν γεγονότα που

αφορούν και αριθμούς τα οποία καθιστούν αληθή τη (2). Κατά συνέπεια, και η (1), όντας αληθής, καθίσταται αληθής από γεγονότα που περιλαμβάνουν αριθμούς.
Δ) Η στάση αυτή συνιστά κυριολεκτική ανάγνωση της (2). Όμως, σύμφωνα με το φιξιοναλιστή, η (2) είναι ψευδής ενώ η (1) είναι αληθής. Κατά συνέπεια, δεχόμαστε ότι η (2) δεν έπεται από την (1). Η (2) εκλαμβάνεται κυριολεκτικά ως ψευδής και δεν υπάρχουν αριθμοί. Η στάση αυτή δεν είναι αναγωγιστική και απορρίπτει την ύπαρξη αριθμών.
Από τις τέσσερες στάσεις που εξετάσαμε ως προς τη σχέση των προτάσεων (1) και (2), η τέταρτη (Δ) είναι εκείνη που ταιριάζει στην προσέγγιση του Field.

Νομιναλισμός/Φιξιοναλισμός: απόρριψη αφηρημένων οντοτήτων

Ο Field απορρίπτει την ύπαρξη αριθμών (μαθηματικών αντικειμένων, γενικότερα). Θεωρεί ότι πρόκειται για φανταστικές οντότητες (fictions) όπως οι μυθιστορηματικοί χαρακτήρες. Μόνο που οι αριθμοί, τα σύνολα κλπ. είναι χρήσιμοι μύθοι σε αντίθεση πχ. με τον μύθο του Όλιβερ Τουίστ. Έτσι, η προσέγγιση του Field ονομάζεται *μυθοκρατία* (fictionalism). Αποτελεί επίσης εκδοχή του νομιναλισμού. Στο μεσαίωνα, ο νομιναλισμός απέρριπτε την ύπαρξη των καθόλου όντων, ενώ στη σύγχρονη εκδοχή του απορρίπτει κάθε αφηρημένη οντότητα, είτε αποτελεί καθόλου είτε αποτελεί αφηρημένο ατομικό αντικείμενο. Η αντίληψη αυτή δικαιολογείται κυρίως με βάση τις δυσκολίες που συνοδεύουν την αποδοχή αφηρημένων οντοτήτων. Οι αφηρημένες (abstract) οντότητες δεν εντάσσονται στο χωρο-χρονικό πλαίσιο, δεν αλληλεπιδρούν αιτιακά μεταξύ τους ή με τις χωροχρονικές οντότητες και διακρίνονται οπωσδήποτε από τις νοητικές (mental), δηλαδή τα περιεχόμενα του νου και της σκέψης. Κατά συνέπεια, τίθεται ένα πρόβλημα σχετικά με τη γνωστική πρόσβασή μας στις αφηρημένες οντότητες. Δεδομένου ότι δεν έχουμε αισθητηριακή πρόσληψη του αφηρημένου και δεν αλληλεπιδρούμε αιτιακά μ’ αυτό, τότε πώς αποκτούμε γνωστική πρόσβαση σε αφηρημένα αντικείμενα; Το γνωσιολογικό αυτό πρόβλημα το έθεσε ο Paul Benacerraf στο άρθρο του “Mathematical Truth” (1973) σε ό,τι αφορά ειδικότερα τα μαθηματικά αντικείμενα όπως τα αντιλαμβάνεται ο μαθηματικός ρεαλισμός. Στο άρθρο αυτό, ο Benacerraf ασκεί κριτική στον μαθηματικό ρεαλισμό παρά το γεγονός ότι αυτός υιοθετεί μιαικανοποιητική σημασιολογία για τις μαθηματικές προτάσεις. Ο μαθηματικός ρεαλισμός δέχεται την καθιερωμένη σημασιολογία σύμφωνα με την οποία οι μαθηματικές προτάσεις πρέπει να διαβάζονται κυριολεκτικά, έτσι ώστε πχ. η πρόταση «υπάρχει ένας τουλάχιστον πρώτος αριθμός» να είναι αληθής αν και μόνο αν υπάρχει ένα τουλάχιστον αντικείμενο με την ιδιότητα να είναι πρώτος αριθμός. Ο Benacerraf έχει παρατηρήσει ότι η συγκεκριμένη προσέγγιση στην αλήθεια των μαθηματικών προτάσεων υπερτερεί σημασιολογικά διότι τις εξομοιώνει με τις προτάσεις άλλων περιοχών της γλώσσας, διατηρώντας μια κοινή σημασιολογία. Η πρόταση «ο 2 είναι πρώτος» και η πρόταση «ο Νίκος είναι ψηλός» έχουν την ίδια λογικο-γραμματική δομή και τις ίδιες συνθήκες αλήθειας με βάση μια κοινή σημασιολογία. Το πρόβλημα όμως είναι ότι ο 2 δεν ανήκει στο χωρο-χρονικό πλαίσιο (όπως ανήκει ο Νίκος) και δεν είναι προσβάσιμος μέσω της αισθητηριακής αντίληψης ούτε κάποιας αιτιακής αλληλεπίδρασης. Η δυσκολία να δεχθεί λοιπόν κανείς την ύπαρξη αφηρημένων αντικειμένων συνδέεται σε μεγάλο βαθμό με την απουσία γνωστικού μηχανισμού πρόσβασης στην εν λόγω αφηρημένη πραγματικότητα.

Θα μπορούσε ωστόσο κάποιος να θεωρήσει ότι ο Benacerraf εκφράζει τον παραπάνω προβληματισμό ξεκινώντας από προϋποθέσεις που δέχονται μια αιτιακή θεωρία γνώσης. Σύμφωνα με μια θεωρία αυτού του είδους, χρειάζεται ο γνώστης να συνδέεται αιτιακά με τις καταστάσεις που καθιστούν αληθή μια πρόταση. Πρόκειται για μια ισχυρή αιτιακή θεωρία γνώσης που ούτως ή άλλως αντιμετωπίζει προβλήματα ακόμα και σε σχέση με πράγματα του φυσικού κόσμου. Για να εξετάσουμε ένα παράδειγμα που δεν αφορά τα μαθηματικά, γνωρίζουμε ότι σύμφωνα με έναν φυσικό νόμο τα σωματίδια με διαφορετικά φορτία έλκονται αλλά δεν έχουμε καμιά αιτιακή σύνδεση με μελλοντικά γεγονότα αυτού του είδους. Άρα, η γνώση μας για μελλοντικές έλξεις μεταξύ μελλοντικών σωματιδίων διαφορετικών φορτίων δεν στηρίζεται σε άμεσες αιτιακές συνδέσεις με τις αντίστοιχες καταστάσεις. Μια αιτιακή θεωρία γνώσης δεν μπορεί να εξηγήσει τη γνώση μας για μελλοντικά φυσικά γεγονότα και γι αυτό, έχει δεχθεί κριτική. Το ερώτημα που τίθεται είναι αν μια πιο ήπια γνωσιολογική προσέγγιση θα μπορούσε να μας λύσει το πρόβλημα όπως πχ. μια αξιοπιστιοκρατική προσέγγιση (reliabilism) θα μπορούσε να βοηθήσει στην προκειμένη περίπτωση των μαθηματικών; Σύμφωνα με τον Field, ένας πλατωνιστής, ακόμα και αν δεχθεί την αξιοπιστιοκρατία, υποχρεώνεται να καταλήξει στο ότι αποτελεί ανεξήγητη σύμπτωση η αλήθεια των μαθηματικών μας πεποιθήσεων. Όμως αυτό το συμπέρασμα θα υπονόμευε οποιαδήποτε δικαιολόγηση αυτών των πεποιθήσεων μέσω των μαθηματικών μας μεθόδων. Διότι δεν αρκεί να διαθέτουμε μια εξήγηση των μαθηματικών μας πεποιθήσεων από τη μια πλευρά και μια εξήγηση των μαθηματικών γεγονότων από την άλλη πλευρά. Αυτό που χρειάζεται είναι μια εξήγηση του συσχετισμού μεταξύ των μαθηματικών μας πεποιθήσεων και των μαθηματικών γεγονότων. Αλλά μια εξήγηση αυτού του είδους είναι αυτή που απουσιάζει. Η δυσκολία λοιπόν σχετικά με την εξήγηση του τρόπου σύνδεσης των πεποιθήσεών μας και των γεγονότων που αφορούν αφηρημένα αντικείμενα αποτρέπει συνήθως την αποδοχή της ύπαρξης αφηρημένων αντικειμένων. Εάν ωστόσο επιθυμούμε να διατηρήσουμε την καθιερωμένη σημασιολογία λόγω της υπεροχής της -την οποία άλλωστε και ο Benacerraf αναγνωρίζει- θα πρέπει να οδηγηθούμε στη λύση που δίνει ο Field: να δεχθούμε αφενός την καθιερωμένη σημασιολογία, διαβάζοντας κατά κυριολεξία τη μαθηματική πρόταση «υπάρχει ένας πρώτος αριθμός» και αφετέρου να την θεωρήσουμε ψευδή (επειδή δεν υπάρχει τέτοια οντότητα).

Ανακεφαλαιώνοντας, είδαμε μέχρι τώρα ότι ο Field είναι φιξιοναλιστής/νομιναλιστής και απορρίπτει την ύπαρξη αφηρημένων οντοτήτων ενώ ταυτόχρονα υιοθετεί την καθιερωμένη σημασιολογική προσέγγιση, αμφισβητώντας την αλήθεια των μαθηματικών προτάσεων. Ο Field αναγνωρίζει ότι υπάρχει μια διαρκής διαμάχη ανάμεσα στους ρεαλιστές από το ένα μέρος, που δέχονται την ύπαρξη μαθηματικών οντοτήτων και θεωρούν βασικό στόχο την ακριβή περιγραφή τους, και στους αντιρεαλιστές από το άλλο μέρος, οι οποίοι απορρίπτουν την ύπαρξη μαθηματικών οντοτήτων και δεν επιδιώκουν τη μαθηματική αλήθεια. (1989, 54) Ο ίδιος διατηρεί αντιρεαλιστική στάση απέναντι στα μαθηματικά, αλλά παρ' όλα αυτά, πιστεύει στην χρησιμότητά τους στις εφαρμογές.

Η έννοια της συντηρητικότητας

Εάν ο στόχος των μαθηματικών είναι η χρησιμότητα τότε θα μπορούσε κανείς να αποδώσει στον Field τον χαρακτηρισμό του ινστρουμενταλιστή (εργαλειοκράτη) ως προς τα μαθηματικά. Αλλά τι είναι αυτό που καθιστά τα μαθηματικά χρήσιμα; Μήπως η συνέπεια των μαθηματικών θεωριών; Ο Field απαντά αρνητικά στο ερώτημα αυτό, διότι η συνέπεια θα ήταν γι αυτόν ένας άνευ ιδιαίτερου ενδιαφέροντος στόχος. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η συνέπεια δεν είναι αρκετή για να δώσουμε μια εξήγηση στην εφαρμογή των μαθηματικών στον φυσικό κόσμο. Αρκεί να σκεφτεί κανείς ότι μια συνεπής μαθηματική θεωρία είναι δυνατό να παράγει συνέπειες (επακόλουθα) ψευδείς (ψευδή) για τον φυσικό κόσμο: «…οποιαδήποτε μαθηματική θεωρία η οποία παράγει ψευδείς νομιναλιστικούς[2] ισχυρισμούς ως συνέπειες θα ήταν ανεπαρκής ακόμα κι αν αυτή ήταν συνεπής» (1989, 55).

Για να επιβεβαιώσει την παραπάνω άποψη, ο Field δίνει ένα παράδειγμα θεωρίας που είναι συνεπής αλλά έχει ψευδείς νομιναλιστικές συνέπειες: Ξεκινούμε με τη συνολο-θεωρία Zermelo-Fraenkel που την τροποποιούμε ώστε να επιτρέπει σύνολα με μέλη μη σύνολα. Σε αυτή επιτρέπεται ο ισχυρισμός ότι υπάρχει ένα σύνολο όλων των μη-συνόλων. Ερμηνεύουμε το σχήμα διαχωρισμού και το σχήμα αντικατάστασης με τέτοιο τρόπο ώστε το εμπειρικό λεξιλόγιο που χρησιμοποιείται για να περιγράψει μη σύνολα μπορεί να εμφανίζεται στις επί μέρους περιπτώσεις των σχημάτων. Χρησιμοποιούμε αυτή την ευρεία ερμηνεία όταν σκεφτόμαστε ότι είναι μη προβληματικό να υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα σύνολο σημείων του χώρου όπου η θερμοκρασία είναι τουλάχιστον 0 ℃ και αυτό επιτυγχάνεται στο βαθμό που επιτρέπουμε στον όρο 'θερμοκρασία' να εμφανίζεται στο σχήμα διαχωρισμού. Σε αυτή την περίπτωση, έχουμε μια διαισθητική θεωρία συνόλων. Στη συνέχεια, απορρίπτουμε το αξίωμα του απείρου και το αντικαθιστούμε με την άρνησή του. Ονομάζουμε τη θεωρία αυτή *M*. Η θεωρία είναι συνεπής αλλά έχει συνέπειες για το φυσικό κόσμο που έρχονται σε αντίθεση με τις περισσότερες φυσικές θεωρίες.

Ας πάρουμε τη νομιναλιστική θεωρία *T* η οποία συνεπάγεται την ύπαρξη μιας άπειρης γραμμικής διάταξης διακριτών μη μαθηματικών οντοτήτων. Ακριβέστερα, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένας τύπος A(x, y) στο λεξιλόγιο της *T* έτσι ώστε από την *T* να μπορούμε να παραγάγουμε τους ισχυρισμούς

i) $\forall x \forall y \forall z\, [A(x,y) \,\&\, A(y,z) \supset A(x,z)]$

ii) $\forall x\ \neg A(x,x)$

iii) $\forall x \forall y\ [A(x,y) \vee x=y \vee A(y,x)]$

iv) $\forall x \exists y\, [A(x,y)\ \&\ \neg \exists z\ (A(x,z)\ \&\ A(z,y))]$

όπου οι ποσοδείκτες περιορίζονται σε μη μαθηματικές οντότητες. Τότε οι θεωρίες *T* και *M* είναι από κοινού ασυνεπείς. Θεωρούμενες μαζί, προσδιορίζουν ένα σύμβολο συνάρτησης που αντιστοιχίζει οποιοδήποτε *x* μέσα στη διάταξη στο 0, τον άμεσο διάδοχό του στο 1, τον διάδοχο του τελευταίου στο 2 κλπ. Το γεγονός ότι υπάρχει ένα

[2] Νομιναλιστικοί ισχυρισμοί: ισχυρισμοί που δεν περιλαμβάνουν αναφορές σε αριθμούς, σύνολα και άλλα μαθηματικά αντικείμενα

σύνολο όλων των μη συνόλων σε συνδυασμό με το σχήμα αντικατάστασης παρέχει την ύπαρξη ενός συνόλου που περιλαμβάνει τα 0,1,2, κλπ. Το τελευταίο έρχεται σε αντίθεση με την άρνηση του αξιώματος του απείρου. Άρα, *M*+*T* ασυνεπής. Άρα πρέπει να υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποιο πρόβλημα με τη *M* παρ' ότι η ίδια είναι συνεπής μαθηματική θεωρία.

Με το παραπάνω επιχείρημα, ο Field προσπάθησε να υποστηρίξει τη θέση ότι μια μαθηματική θεωρία είναι δυνατό να έχει ψευδείς νομιναλιστικές συνέπειες ακόμα και αν είναι συνεπής. Δεν του αρκεί, επομένως, η συνέπεια μιας μαθηματικής θεωρίας. Χρειάζεται κάτι περισσότερο και αυτό θα ήταν μια έννοια ισχυρότερη από τη συνέπεια. Αυτό που ο Field προτείνει, για να είναι μια μαθηματική θεωρία ενδιαφέρουσα, είναι η συνέπεια της εν λόγω θεωρίας *με κάθε εσωτερικά συνεπή θεωρία για τον φυσικό κόσμο*. Με άλλα λόγια, μια μαθηματική θεωρία πρέπει να είναι συνεπής με κάθε εσωτερικά συνεπή νομιναλιστικά διατυπωμένη φυσική θεωρία. Σε αυτή την περίπτωση, η μαθηματική θεωρία λέγεται *συντηρητική* (conservative).

Ο Field δίνει τον ακόλουθο ακριβή ορισμό:

Μια μαθηματική θεωρία *M* είναι συντηρητική αν και μόνο αν για κάθε νομιναλιστικό ισχυρισμό *A* για τον φυσικό κόσμο και κάθε σύστημα *N* από νομιναλιστικούς ισχυρισμούς, ο ισχυρισμός *A* έπεται από την *N*+*M* αν και μόνο αν έπεται από το σύστημα *N* μόνο του.

Αυτό που η συντηρητικότητα εκφράζει, είναι ότι δεν μπορούν να παραχθούν από την *N*+*M* περισσότερες (νομιναλιστικές) συνέπειες από αυτές που θα προέκυπταν από τη θεωρία *N* μόνη της (πριν προστεθεί η μαθηματική θεωρία). Επομένως, σε ό,τι αφορά τις νομιναλιστικές συνέπειες ενός συστήματος ισχυρισμών, το σύστημα *N*+*M* (που περιλαμβάνει μαθηματικά) δεν διαθέτει μεγαλύτερη ισχύ απ' ότι το σύστημα *N* (που δεν περιλαμβάνει μαθηματικά). Η συντηρητικότητα συλλαμβάνει μια παραδοσιακή ιδέα ότι τα μαθηματικά δεν έχουν κανένα εμπειρικό περιεχόμενο. Είναι ένα σύνολο από a priori και αναγκαίες αλήθειες (ισχυρισμούς που δεν επιδέχονται αναθεωρήσεις ως προς τις αληθοτιμές τους ανεξάρτητα από το πώς είναι ο εμπειρικός κόσμος). Η συντηρητικότητα διασώζει λοιπόν τον αναγκαίο χαρακτήρα των μαθηματικών. Όταν μια μαθηματική θεωρία είναι συντηρητική αυτό ισχύει αναγκαία. Η συντηρητικότητα είναι (από τον ορισμό της) μια έννοια ασθενέστερη από την αλήθεια αλλά ισχυρότερη από τη συνέπεια. Σύμφωνα με ένα χαρακτηριστικό σχόλιο του Field, μπορούμε να σκεφτόμαστε τη συντηρητικότητα ως "αναγκαία αλήθεια χωρίς αλήθεια" (1989, 61).

Η συντηρητικότητα είναι ισοδύναμη με το εξής:

Έστω *A* ένας νομιναλιστικός ισχυρισμός. Ο *A* δεν αποτελεί συνέπεια της *M* παρεκτός εάν ο *A* αποτελεί λογική αλήθεια.

Με αυτό τον τρόπο, εκφράζεται η άποψη του Field ότι τα μαθηματικά δεν έχουν εμπειρικές συνέπειες. Πρέπει να σημειωθεί ότι η συντηρητικότητα δεν συνεπάγεται το ψεύδος των μαθηματικών θεωριών αλλά εξηγεί τη χρησιμότητα των μαθηματικών. Έτσι, μια μαθηματική θεωρία είναι χρήσιμη ακριβώς επειδή, χάρη στη συντηρητικότητά της, είναι δυνατόν να παράγουμε νομιναλιστικά διατυπωμένες συνέπειες από νομιναλιστικά διατυπωμένες προκείμενες με σχετική ευκολία. Ο Field διευκρινίζει ότι η διαφορά ως προς την παραγωγή νομιναλιστικά διατυπωμένων ισχυρισμών από το σύστημα *N+M* και την παραγωγή νομιναλιστικά διατυπωμένων ισχυρισμών από την *N* μόνο έχει να κάνει με την ευκολία της διαδικασίας παραγωγής. Με άλλα λόγια, είναι ευκολότερο να διαπιστώσουμε ότι ο ισχυρισμός *A* προκύπτει παραγωγικά από το σύστημα *N+M* από το να διαπιστώσουμε ότι ο ίδιος ισχυρισμός προκύπτει παραγωγικά από την *N*.

Ένας ρεαλιστής, από την άλλη πλευρά, θα μπορούσε να αντιτάξει ότι τα μαθηματικά είναι χρήσιμα κατά έναν πιο ουσιώδη τρόπο. Δηλαδή, δεν είναι χρήσιμα απλώς και μόνον γιατί διευκολύνουν την παραγωγή νομιναλιστικών συνεπειών από νομιναλιστικές προκείμενες αλλά γιατί είναι απαραίτητα κατά τρόπο αναπόδραστο ως μέρος των προκειμένων μιας επιστημονικής θεωρίας. Η αναφορά σε μαθηματικά αντικείμενα πχ. αριθμούς, σύνολα κλπ. είναι αναγκαία και αναπόδραστη για την επιστήμη. Ο Field πιστεύει ότι η κρισιμότητα στη διαμάχη ρεαλισμού/αντιρεαλισμού έγκειται ακριβώς στο αν πρέπει να δεχθούμε το δεύτερο από τα δύο αυτά σημεία. Το αναπόδραστο των μαθηματικών είναι αυτό το χαρακτηριστικό που θα τους προσέδιδε μια σημασία και αξία μεγαλύτερη από το να διευκολύνουν απλώς την παραγωγή νομιναλιστικών ισχυρισμών. Και αυτός ακριβώς είναι ο στόχος επίθεσης του Field.

Θα πρέπει επίσης να επισημανθεί και κάτι άλλο. Σύμφωνα με τα προαναφερθέντα για την συντηρητικότητα, η ιδιότητα αυτή *δεν* συνεπάγεται το ψεύδος των μαθηματικών θεωριών. Δεδομένου ότι μια μαθηματική θεωρία είναι συντηρητική θα είναι και συνεπής επομένως θα μπορούσε (δυνάμει) να είναι αληθής. Αναρωτιέται επομένως κανείς πώς ο Field δικαιολογεί την θέση του για το ψεύδος των μαθηματικών; Το επιχείρημά του είναι έμμεσο, όχι άμεσο. Ας θεωρήσουμε την πρόταση «Υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί». Για τους ρεαλιστές φιλοσόφους, η πρόταση αυτή της θεωρίας αριθμών είναι αληθής αν και μόνον υπάρχουν άπειρες οντότητες που είναι αριθμοί και έχουν την ιδιότητα να είναι πρώτοι. Επομένως, για να είναι η θεωρία αριθμών αληθής απαιτούνται άπειρες στο πλήθος οντότητες τις οποίες διατρέχουν οι ποσοδείκτες της. Σύμφωνα με τον Field, η θεωρία αριθμών δεν χρειάζεται να είναι αληθής -αρκεί να είναι συντηρητική- για να είναι χρήσιμη. Αλλά το ότι είναι συντηρητική δεν απαιτεί την ύπαρξη αυτών των άπειρων στο πλήθος αφηρημένων οντοτήτων. Κάποιος θα μπορούσε να αντιτάξει εδώ τον ισχυρισμό ότι είναι διαφορετικό το να υποστηρίζει ο Field ότι μια μαθηματική θεωρία δεν χρειάζεται να είναι αληθής ώστε να είναι χρήσιμη από το να υποστηρίζει ότι είναι πράγματι ψευδής. Ο ίδιος πιστεύει ότι το ψεύδος πχ. των υπαρκτικών μαθηματικών προτάσεων (άρα και των μαθηματικών θεωριών που τις περιλαμβάνουν) οφείλεται στο ότι δεν υπάρχουν μαθηματικά αντικείμενα.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, ο Field πιστεύει ότι η συντηρητικότητα των μαθηματικών είναι ό,τι ακριβώς χρειαζόμαστε για να δικαιολογήσουμε την χρησιμότητά τους. Δεν χρειαζόμαστε κάτι ισχυρότερο όπως η μαθηματική αλήθεια.

Το νομιναλιστικό πρόγραμμα του Field

Όπως έχουμε ήδη δει, ένα κρίσιμο βήμα για την κατίσχυση του προγράμματος του Field είναι να δειχθεί ότι δεν ισχύει ο αναπόδραστος χαρακτήρας των μαθηματικών και ότι οι επιστημονικές θεωρίες μπορούν να διατυπώνονται νομιναλιστικά. Αυτό το πρόγραμμα (νομιναλιστικό πρόγραμμα) έχει ως κύριο στόχο του να εξασφαλίσει τη νομιναλιστική διατύπωση των επιστημονικών θεωριών. Εάν το αναπόδραστο των μαθηματικών οντοτήτων δεν ισχύει τότε δεν υπάρχει κανένα καλό επιχείρημα υπέρ του μαθηματικού ρεαλισμού. οι υπαρκτικές μαθηματικές προτάσεις είναι ψευδείς και οι μαθηματικές θεωρίες που τις εμπεριέχουν είναι επίσης ψευδείς.Ας λάβουμε υπόψη τη διάκριση μεταξύ καθαρών μαθηματικών και εφαρμοσμένων μαθηματικών. Το επιχείρημα του *αναπόδραστου* ισχύει για τα εφαρμοσμένα μαθηματικά. Ο μόνος λόγος –πιστεύει ο Field- για τον οποίο θα μπορούσαμε να δεχθούμε ότι οι μαθηματικές οντότητες υπάρχουν θα ήταν ένα επιχείρημα *αναπόδραστου*. Αυτό το επιχείρημα χρησιμοποιήθηκε από τους μαθηματικούς ρεαλιστές με την ακόλουθη μορφή:

Οι επιστημονικές θεωρίες συγκροτούνται και διατυπώνονται περιλαμβάνοντας αναφορές τόσο σε μη παρατηρήσιμες φυσικές οντότητες όσο και σε μαθηματικά αντικείμενα. Και τα δύο είδη οντοτήτων είναι αναγκαία για τη συγκρότηση των καλύτερων θεωριών που διαθέτουμε για τον κόσμο. Συνεπώς, εάν αυτός είναι ένας λόγος για να δεχθούμε την ύπαρξη των μη παρατηρήσιμων φυσικών οντοτήτων, θα πρέπει να είναι εξίσου ένας λόγος για να δεχθούμε την ύπαρξη των μαθηματικών οντοτήτων.

Το εν λόγω επιχείρημα δικαιολογεί την ύπαρξη των μαθηματικών αντικειμένων με βάση το ρόλο τους στις επιστημονικές εξηγήσεις και θεωρίες. Ο Field θεωρεί ότι είναι το ισχυρότερο επιχείρημα του μαθηματικού ρεαλισμού γι αυτό επιχειρεί –ως αντιρεαλιστής- να το απορρίψει. Οι προτάσεις μιας επιστημονικής θεωρίας που περιλαμβάνει μαθηματικά είναι διατυπωμένες με μεικτό τρόπο, δηλαδή με όρους μαθηματικούς και όρους της αντίστοιχης επιστήμης (πχ. φυσικούς). Ο Field, όπως προαναφέρθηκε, ακολουθεί την καθιερωμένη σημασιολογία η οποία είναι ενιαία για τη μαθηματική γλώσσα και τις άλλες περιοχές της επιστημονικής γλώσσας. Εάν δεν υπάρχουν μαθηματικά αντικείμενα τότε οι μεικτές προτάσεις θα είναι ψευδείς (ακόμα και αν υπάρχουν οι σχετικές φυσικές οντότητες).

Ο Field κατευθύνει λοιπόν το ερευνητικό νομιναλιστικό του έργο εναντίον του μόνου –κατά τη γνώμη του- σοβαρού επιχειρήματος υπέρ της ύπαρξης των μαθηματικών οντοτήτων, δηλαδή του *επιχειρήματος* του *αναπόδραστου* των Quine & Putnam (*indispensability* argument). Ο Field αναλαμβάνει να δείξει ότι υπάρχουν νομιναλιστικές εκδοχές των φυσικών θεωριών. Επιχειρεί να δείξει ότι τα μαθηματικά μπορούν να είναι περιττά (dispensable) κατά τη διατύπωση των επιστημονικών θεωριών. Το διακύβευμα είναι βέβαια καθαρά φιλοσοφικό και αφορά τη διαμάχη ρεαλισμού-αντιρεαλισμού. Στην πράξη δεν υπάρχει λόγος να μεταβάλλουμε τη συνήθη πρακτική της χρήσης των μαθηματικών θεωριών στην επιστημονική μας δραστηριότητα.

Συνεπώς, το πρόγραμμα του Field υπονομεύει τη δέσμευση σε μαθηματικές οντότητες που παίζουν ένα ρόλο στην επιστήμη. Στην περίπτωση των καθαρών μαθηματικών, τι θα ίσχυε; Ο Field (όπως θα έκανε και ο Hilbert) επιδιώκει την απλή συνέπεια μιας μαθηματικής θεωρίας (όχι τη *συντηρητικότητα*, αφού δεν πρόκειται για εφαρμοσμένα μαθηματικά). Η συνέπεια, βέβαια, δεν συνεπάγεται την ύπαρξη αντικειμένων.

Ας δούμε τη νομιναλιστική διαδικασία αναλυτικότερα: ας θεωρήσουμε μια φυσική θεωρία *T* που χρησιμοποιεί μαθηματικό λεξιλόγιο. Την αντικαθιστούμε με μια άλλη φυσική θεωρία *T΄* η οποία έχει ακριβώς τις ίδιες νομιναλιστικές συνέπειες όπως η *T*, αλλά δεν περιλαμβάνει μαθηματικούς όρους. Ας πάρουμε τώρα έναν ισχυρισμό *A* μιας φυσικής θεωρίας και ας τον αντικαταστήσουμε με έναν άλλο (ισοδύναμο) ισχυρισμό *A΄* ο οποίος είναι νομιναλιστικά αποδεκτός, δηλαδή οι ποσοδείκτες του δεν εφαρμόζονται σε μαθηματικά αντικείμενα. Ο *A΄* είναι επακόλουθο της *T΄* αν και μόνο αν είναι επακόλουθο της *T*. Όμως ο *A΄* παράγεται από την *T* ευκολότερα (ως *A*) λόγω της χρήσης των μαθηματικών.

Με ποιο τρόπο τα μαθηματικά διευκολύνουν την παραγωγή; Ας δούμε το παράδειγμα:

(3) Ένα μήλο και ένα μήλο κάνουν δύο μήλα (νομιναλιστική πρόταση)

(4) 1 + 1 = 2 (μαθηματική πρόταση)

Το (4) είναι το αφηρημένο αντίστοιχο του (3)

Αν χρησιμοποιήσουμε το (4) στις διαδικασίες παραγωγής με άλλες μαθηματικές προτάσεις (αφηρημένα αντίστοιχα νομιναλιστικών προτάσεων) και παραγάγουμε τις συνέπειες τότε αυτές θα είναι μαθηματικές προτάσεις. Ύστερα θα τις μεταφράσουμε σε νομιναλιστικές προτάσεις όπως η (3).

Γενικά, έστω *N* μια νομιναλιστικά διατυπωμένη θεωρία και *M* μια συντηρητική μαθηματική θεωρία. Ας υποθέσουμε ότι η *A1** και η *A2** είναι νομιναλιστικές προκείμενες. Τότε παίρνουμε τα αφηρημένα αντίστοιχά τους *M1* και *M2*. Αυτά συνεπάγονται τη *M3*. Ας μεταφράσουμε τη *M3* στην *A3** (νομιναλιστική πρόταση). Λόγω της συντηρητικότητας της μαθηματικής θεωρίας, δεν θα παραχθούν περαιτέρω συνέπειες από εκείνες που θα παράγονταν από τις αρχικές προκείμενες (πριν τη μετατροπή τους σε αφηρημένα αντίστοιχα). Άρα, καταλήγουμε στο ότι η *A1** & *A2** συνεπάγεται την *A*3*. Έχουμε αποδείξει την *A3** στο πλαίσιο της *N+M*. Λόγω όμως της συντηρητικότητας της *M*, η *A3** είναι αποδείξιμη από την *N* μόνη της.

Ακολουθεί ένα άλλο παράδειγμα που παρουσιάζει ο Field (1989, 61-62) για να εξηγήσει τον τρόπο που τα μαθηματικά διευκολύνουν την παραγωγή νομιναλιστικών συνεπειών από νομιναλιστικές προκείμενες.

Έστω η νομιναλιστικά διατυπωμένη επιστημονική θεωρία N η οποία εμπεριέχει κάποιους αριθμητικούς ποσοδείκτες ως μέρος της γλώσσας της οι οποίοι όμως δεν εφαρμόζονται σε αριθμούς[3]. Η θεωρία *N* έχει επίσης και κάποιο μη μαθηματικό λεξιλόγιο. Έστω τώρα μια μαθηματική θεωρία *M* που εμπεριέχει την αριθμητική συν ένα τμήμα της συνολοθεωρίας.

Ας υποθέσουμε ότι η *N* εμπεριέχει τις ακόλουθες προτάσεις:

1. Υπάρχουν ακριβώς είκοσι ένα μυρμηγκοφάγοι (aardvarks)
2. Σε κάθε ένα μυρμηγκοφάγο υπάρχουν τρεις μύγες.
3. Κάθε μύγα είναι ακριβώς επάνω σε ένα μυρμηγκοφάγο

Έστω τώρα ότι θέλουμε να ξέρουμε εάν η ακόλουθη πρόταση αποτελεί συνέπεια της θεωρίας *N*:

4. Υπάρχουν ακριβώς εξήντα τρεις μύγες.

Η (4) αποτελεί (παραγωγική) συνέπεια των προκειμένων 1-3. Όμως είναι πολύ δύσκολο να αποδείξουμε αυτή τη συνέπεια στο λεξιλόγιο της *N*.

Μπορούμε να κινηθούμε πιο γρήγορα. Ας σκεφτούμε τι θα γίνει αν προσθέσουμε τη μαθηματική θεωρία *M* στην *N*. Τότε μπορούμε να συναγάγουμε τα ακόλουθα από τις παραπάνω προκείμενες 1-3:

1΄. Η πληθικότητα του συνόλου των μυρμηγκοφάγων είναι 21

2΄. Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο των μυρμηγκοφάγων και η οποία αντιστοιχίζει σε κάθε οντότητα του πεδίου το σύνολο των μυγών που βρίσκονται πάνω σ' αυτή την οντότητα. Όλα τα σύνολα μέσα στο πεδίο τιμών της συνάρτησης θα έχουν πληθικότητα 3.

3΄. Η συνάρτηση που αναφέρεται στο 2΄ είναι 1-1 (και επί) και οι τιμές της καθορίζουν μια διαμέριση στο σύνολο όλων των μυγών.

Αυτό που παρουσιάζει ενδιαφέρον είναι ότι τα 1΄-3΄ αποτελούν αφηρημένα αντίστοιχα των 1-3, αφού οι ισοδυναμίες 1 $\leftrightarrow$ 1΄, 2 $\leftrightarrow$ 2΄, 3 $\leftrightarrow$ 3΄ αποδεικνύονται στη γλώσσα της *N*+*M*. Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία συνόλων και την αριθμητική που περιλαμβάνονται στη μαθηματική θεωρία *M*. Θεωρούμε το σύνολο που αποτελείται από όλους τους μυρμηγκοφάγους και μόνο αυτούς.

Τότε μπορούμε να διατυπώσουμε τις εξής προτάσεις εντός της *N*+*M*:

[3] Για παράδειγμα, $\exists_0 xFx =_{df} \forall x \neg Fx$, $\exists_1 xFx =_{df} \exists x (Fx \wedge \forall y\, Fy \rightarrow y=x)$

(a) Εάν όλα τα μέλη της διαμέρισης ενός συνόλου X έχουν πληθικότητα α και η πληθικότητα του συνόλου των μελών της διαμέρισης είναι β τότε αυτή η πληθικότητα του X είναι $\alpha \cdot \beta$
(b) το πεδίο τιμών και το πεδίο ορισμού μιας 1-1 (και επί) συνάρτησης έχουν την ίδια πληθικότητα
(c) $3 \cdot 21 = 63$

Επομένως, από τα 1΄-3΄ μπορούμε να συναγάγουμε την πρόταση :
4΄. Η πληθικότητα του συνόλου όλων των μυγών είναι 63.
Όμως η 4΄ είναι το αφηρημένο αντίστοιχο της 4. Λόγω της συντηρητικότητας της μαθηματικής θεωρίας *Μ* (*N*+*M* αποτελεί συντηρητική επέκταση της *N*) προκύπτει ότι η συνέπεια 4 θα προέκυπτε από τη θεωρία *N* (και ιδιαίτερα από τα 1-3) και χωρίς να προστεθεί η μαθηματική θεωρία *Μ*. Η συντηρητικότητα είναι αυτή που εξασφαλίζει ότι με την προσθήκη της μαθηματικής θεωρίας *Μ* στη *N* δεν παράγονται περισσότερες συνέπειες από αυτές που θα προέκυπταν παραγωγικά από την *N* μόνη της. Όμως από όσα προαναφέρθηκαν, γίνεται φανερό ότι η μαθηματική θεωρία *Μ* διευκολύνει την παραγωγή συνεπειών (επακολούθων).

Η μεθοδολογία του μαθηματικού νομιναλισμού/φιξιοναλισμού ως προς τις επιστημονικές εξηγήσεις

i)*Εγγενείς και εξωγενείς εξηγήσεις*

Ο μαθηματικός νομιναλιστής/φιξιοναλιστής επιχειρεί να διατυπώσει θεωρίες που είναι τόσο καλές όσο και οι θεωρίες της μαθηματικοποιημένης φυσικής αλλά από τις οποίες δεν συνάγεται η ύπαρξη μαθηματικών οντοτήτων. Με βάση τα προηγούμενα, ένας φιξιοναλιστής χρειάζεται:
(I) ένα λεξιλόγιο για την περιγραφή της φυσικής δομής του κόσμου εγγενώς, χωρίς οποιαδήποτε αναφορά σε μαθηματικές οντότητες.
(II) ορισμούς όπως και αποδείξεις των θεωρημάτων *αναπαράστασης* και *μοναδικότητας*. Με αυτά, δείχνει πώς η φυσική δομή μπορεί να συσχετιστεί (και να αναπαρασταθεί) από μια μαθηματική δομή.
(III) μια μαθηματική θεωρία η οποία θα αναπαραστήσει τη φυσική δομή και στη συνέχεια θα παραχθούν συνέπειες.

(IV) καταγραφή μερικών απλών νόμων με χρήση νομιναλιστικού λεξιλογίου έτσι ώστε οι ίδιες νομιναλιστικές συνέπειες που προκύπτουν από τη μαθηματικοποιημένη φυσική θεωρία να προκύπτουν και από τη νομιναλιστική θεωρία χωρίς να συνάγεται η ύπαρξη μαθηματικών οντοτήτων.

Ο Field πιστεύει ότι η νομιναλιστική διατύπωση των θεωριών υπερέχει των προσεγγίσεων που χρησιμοποιούν μαθηματική διατύπωση. Όχι μόνο είναι δυνατό να εξαλειφθούν οι αριθμοί από την επιστήμη αλλά κάτι τέτοιο είναι σαφώς προτιμότερο. Αυτό οφείλεται στο ότι οι νομιναλιστικές εξηγήσεις ερμηνεύουν το *τι* συμβαίνει στο φυσικό κόσμο χωρίς τη χρήση εξωγενών, δηλαδή αφηρημένων, οντοτήτων. Ο ίδιος θεωρεί μη ικανοποιητικές τις εξηγήσεις στις οποίες λαμβάνουν μέρος εξωγενείς οντότητες. Οι μαθηματικές οντότητες είναι *εξωγενείς* διότι δεν συμμετέχουν αιτιακά στα όσα συμβαίνουν στη φύση. Συνεπώς, για ένα νομιναλιστή, αρκούν οι εξηγήσεις που χρησιμοποιούν μόνον *εγγενείς* οντότητες (πχ. σωματίδια φυσικής) που συμμετέχουν σε αιτιακές αλληλεπιδράσεις (Field, 1980, 44-45).

Εδώ υπάρχει μια ένταση ανάμεσα στην *εγγενή* (intrinsic) εξήγηση (παρουσίαση της φυσικής δομής του κόσμου χωρίς αναφορά σε μαθηματικά αντικείμενα) και στην *εξωγενή* (extrinsic) εξήγηση (παρουσίαση της φυσικής δομής του κόσμου μέσω μιας μαθηματικής δομής). Η φυσική (νομιναλιστική) εξήγηση είναι εγγενής. Για παράδειγμα, τα ηλεκτρόνια εξηγούν εγγενώς τις τροχιές σε ένα νέφος ηλεκτρονίων. Οι μαθηματικές εξηγήσεις είναι εξωγενείς δεδομένου ότι οι μαθηματικές οντότητες -εάν υπάρχουν- που συμπεριλαμβάνονται σ' αυτές, είναι εξωγενείς προς τη διαδικασία η οποία τίθεται προς εξήγηση (αυτό ισχύει κυρίως επειδή οι μαθηματικές οντότητες, εάν υπάρχουν, είναι αιτιακώς αδρανείς). Σχετικά με αυτό το θέμα, ο μαθηματικός νομιναλισμός/φιξιοναλισμός του Field υιοθετεί δύο μεθοδολογικές αρχές:

Σύμφωνα με την πρώτη μεθοδολογική αρχή του μαθηματικού νομιναλισμού/φιξιοναλισμού, πρέπει κάποιος να προτιμά τις εγγενείς εξηγήσεις από τις εξωγενείς. Σύμφωνα με τη δεύτερη μεθοδολογική αρχή, κάτω από κάθε καλή εξωγενή εξήγηση υπάρχει πάντοτε μια εγγενής. Έτσι, ένας νομιναλιστής προτιμά μια εξήγηση που αφορά μόνον φυσικά φαινόμενα, φυσικές οντότητες και γεγονότα. Όταν όμως έχει μπροστά του μια εξωγενή εξήγηση (μια εξήγηση που χρησιμοποιεί μαθηματικά), τότε γνωρίζει ότι κάτω από αυτήν (σε ένα βαθύτερο επίπεδο) υπάρχει μια εγγενής εξήγηση.

ii) Τα θεωρήματα αναπαράστασης και μοναδικότητας

Ως νομιναλιστής ο Field χρειάζεται μια νομιναλιστική γλώσσα για να διατυπώσει τις φυσικές θεωρίες χωρίς αναφορές σε μαθηματικά (αφηρημένα) αντικείμενα. Οι εγγενείς εξηγήσεις –με άλλα λόγια- διατυπώνονται σε γλώσσα που δεν περιλαμβάνει μαθηματικό λεξιλόγιο. Στο πλαίσιο της νομιναλιστικής γλώσσας, ο ίδιος χρησιμοποιεί ως πρωταρχικά (μη περαιτέρω αναλύσιμα) τα *συγκριτικά* κατηγορήματα για το 'μεταξύ' (between) και τη 'σύμπτωση' (congruence):

A) 'x bet yz' δηλαδή 'το x είναι *μεταξύ* των y και z' (εκφράζει τη διαίσθηση ότι τα x, y και z είναι σημεία σε μια ευθεία και ότι το x βρίσκεται ανάμεσα στα y και z)

B) 'xy cong zw' δηλαδή 'τα x, y βρίσκονται σε *σύμπτωση* με τα z,w' (το οποίο πάλι διαισθητικά σημαίνει ότι η απόσταση μεταξύ των x και y συμπίπτει με την απόσταση μεταξύ των z και w).

Διατυπώνει επίσης μια θεωρία με κατάλληλα αξιώματα που διέπουν τη συμπεριφορά των παραπάνω κατηγορημάτων:

i. Εάν το y είναι μεταξύ των x και z τότε το y είναι μεταξύ των z και x
ii. Εάν το y είναι μεταξύ των x και z και το z είναι μεταξύ των y και w τότε το y
είναι μεταξύ των x και w
iii. Τα x y βρίσκονται σε σύμπτωση με τα y x
iv. Εάν το y είναι μεταξύ των x και z και τα x y είναι σε σύμπτωση με τα x z τότε y=z

Μέσω των κατηγορημάτων 'x y συμπίπτουν με z w' και 'x μεταξύ των y και z', ένας νομιναλιστής κατορθώνει να εκφράζει τις αποστάσεις μεταξύ αντικειμένων χωρίς να χρησιμοποιεί ποσοδείκτες επί αφηρημένων αντικειμένων. Εάν για παράδειγμα, c και d είναι τα σημεία όπου αρχίζει και τελειώνει το καθιερωμένο μέτρο, μπορεί κανείς να εκφράσει το γεγονός ότι η απόσταση ανάμεσα στα a και b είναι δύο μέτρα με νομιναλιστικό τρόπο: '∃u(u Bet ab & au Cong ub & ub Cong cd)'. Οι ποσοδείκτες δεν δρουν σε αριθμούς (αφηρημένα αντικείμενα) αλλά σε θέσεις που βρίσκονται ανάμεσα στα a και b. Επίσης μπορούμε να διατυπώσουμε την πρόταση ότι κάθε ευθεία είναι απεριόριστα επεκτάσιμη με νομιναλιστικό τρόπο: '∀y∀z∃x (x Bet yz)'.

Συνήθως αναπτύσσουμε μια γεωμετρική θεωρία με χρήση αριθμών, πχ. εκφράζουμε αριθμητικά την απόσταση. Ο Hilbert (1971) μάλιστα έδειξε ότι μπορούμε να κάνουμε το ίδιο, χωρίς αναφορά σε αριθμούς, αν χρησιμοποιήσουμε τα θεωρήματα *αναπαράστασης* και *μοναδικότητας*. Κάτι τέτοιο έχει μεγάλη σημασία για το νομιναλισμό. Πράγματι, τα θεωρήματα αυτά συνδέουν τις νομιναλιστικές και τις πλατωνιστικές διατυπώσεις μιας θεωρίας δείχνοντας πώς διαφορετικές προτάσεις στις δύο θεωρίες αντιστοιχούν η μια στην άλλη. Μπορούν να ληφθούν υπόψη για τους νομιναλιστικούς στόχους ενός μαθηματικού φιξιοναλιστή ο οποίος επιδιώκει τη δυνατότητα μεταφοράς από μια μαθηματικοποιημένη εκδοχή μιας φυσικής θεωρίας σε μια νομιναλιστική εκδοχή και αντίστροφα. Τα θεωρήματα του Hilbert δείχνουν ότι για οποιοδήποτε μοντέλο της νομιναλιστικής αξιωματικοποίησης της γεωμετρίας μπορεί κάποιος να προσδιορίσει μια συνάρτηση απόστασης d(x,y).

Ορισμός: μια αποδεκτή συνάρτηση *απόστασης* είναι μια συνάρτηση δύο θέσεων, με πεδίο ορισμού που αποτελείται από ζεύγη σημείων έτσι ώστε:
(a) για οποιαδήποτε σημεία x, y, z και w, τα xy συμπίπτουν με τα zw εάν και μόνο αν $d(x,y) = d(z,w)$
(b) για οποιαδήποτε σημεία x, y και z, το y είναι μεταξύ των x και z εάν και μόνο εάν $d(x,y) + d(y,z) = d(x,z)$
Τότε ισχύουν τα εξής:

Θεώρημα αναπαράστασης: υπάρχει μια (τουλάχιστον) αποδεκτή συνάρτηση απόστασης
Θεώρημα μοναδικότητας: εάν d1 και d2 είναι αποδεκτές συναρτήσεις απόστασης τότε R(d1, d2). Σε αυτή την περίπτωση, το R θα μπορούσε να είναι «γραμμικός μετασχηματισμός», δηλαδή το “R(d1, d2)” θα μπορούσε να αντικατασταθεί με το εξής:
“για κάποια σταθερά c, για οποιαδήποτε x, y, $d1(x,y) = c \cdot d2(x,y)$”. Έτσι, μπορούμε να γράψουμε «η συνάρτηση απόστασης είναι μοναδική στη βάση γραμμικού μετασχηματισμού». Αυτό αντιστοιχεί στο γεγονός ότι μια μονάδα μέτρησης είναι αυθαίρετα επιλεγμένη.

Τα εν λόγω θεωρήματα αποσκοπούν στην αντιστοίχιση των φυσικών γεγονότων με *αφηρημένα σύστοιχα*. Έτσι μια εγγενής εξήγηση που δεν χρησιμοποιεί μαθηματικά στοιχεία αντιστοιχίζεται σε μια εξωγενή εξήγηση με μαθηματικά, δηλαδή, αφηρημένα στοιχεία. Τα ανωτέρω θεωρήματα διευκολύνουν την παραγωγή λογικών συνεπειών αλλά, δεδομένης της συντηρητικότητας των μαθηματικών, η παραγωγή των εν λόγω συνεπειών θα μπορούσε να γίνει και με καθαρά εγγενείς όρους. Δηλαδή, η χρήση των μαθηματικών διευκολύνει την παραγωγή νομιναλιστικά διατυπωμένων συνεπειών οι οποίες, όμως, θα μπορούσαν να παραχθούν απευθείας στη νομιναλιστική γλώσσα.

iii) *Η επέκταση του θεωρήματος αναπαράστασης από τον Field*

O Field επέκτεινε τη χρήση του θεωρήματος αναπαράστασης για να διευκολύνει τις νομιναλιστικές του επιδιώξεις. Για οποιοδήποτε μοντέλο μιας (νομιναλιστικά διατυπωμένης φυσικής) θεωρίας *N* με χωρο-χρόνο S η οποία χρησιμοποιεί *συγκριτικά κατηγορήματα* αλλά όχι αριθμητικούς τελεστές, υπάρχουν:

(a) Ένας 1–1 χωροχρονικός τελεστής *συστοίχισης* Φ : S → R4, ο οποίος είναι μοναδικός ως προς ένα γενικευμένο μετασχηματισμό Γαλιλαίου ,

(b) μια συνάρτηση πυκνότητας μάζας ρ : S → R+ {0}, που είναι μοναδική ως προς ένα θετικό πολλαπλασιαστικό μετασχηματισμό και

(c) μια δυνητική βαρυτική συνάρτηση σ : S → R, που είναι μοναδική ως προς ένα θετικό γραμμικό μετασχηματισμό.

Όλα τα παραπάνω διατηρούν την αρχική φυσική δομή (με την έννοια ότι οι συγκριτικές σχέσεις που έχουν οριστεί με όρους αυτών των συναρτήσεων συμπίπτουν με τις συγκριτικές σχέσεις που χρησιμοποιούνται στη *N*). Πολύ περισσότερο, οι νόμοι της Νευτώνειας βαρυτικής θεωρίας στη συναρτησιακή τους μορφή, ισχύουν εάν οι συναρτήσεις Φ, ρ και σ θεωρηθούν αναφορές των σχετικών τελεστών.

Το εγχείρημα του Field συνίστατο στο να διατυπώσει τη φυσική Νευτώνεια θεωρία (μία τουλάχιστον φυσική θεωρία) με νομιναλιστικούς όρους, αποφεύγοντας τους πραγματικούς αριθμούς και τα σύνολα. Δημιούργησε μια μηχανική με υποκατάστατα των παραγώγων και των ολοκληρωμάτων. Τα αξιώματά του υποδεικνύουν την ύπαρξη άπειρων σημείων του χωροχρόνου ο οποίος είναι ισόμορφος με τον R^4. Η οντολογία του έχει το μέγεθος του δυναμοσυνόλου του συνεχούς. Κάνει χρήση χωροχρονικών σημείων θεωρώντας τα φυσικά αντικείμενα (και όχι αφηρημένα) καθώς και των περιοχών αυτών των χωροχρονικών σημείων. Στην πραγματικότητα όμως, τα χωροχρονικά σημεία αντιστοιχούν σε τετράδες πραγματικών αριθμών και οι περιοχές των σημείων αντιστοιχούν σε σύνολα τετράδων. Χρησιμοποιεί ομομορφισμούς από χωροχρονικά σημεία σε στοιχεία μαθηματικών δομών. Οι ομομορφισμοί διατηρούν τη δομή με τρόπο ώστε οι συγκριτικές σχέσεις στη νομιναλιστική φυσική του Field να αντιστοιχούν στις συγκριτικές σχέσεις του R^n . Για παράδειγμα, η συνάρτηση g αντιστοιχίζει τη σχέση 'ταυτότητα διαφοράς θερμοκρασίας': « η διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ των x και y ταυτίζεται με τη διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ των z και w », σε μια συγκριτική σχέση πραγματικών αριθμών:

Η σχέση *Tempcong* ισχύει μεταξύ των ζευγών x, y και z, w αν και μόνο αν

$|g(x) - g(y)| = |g(z) - g(w)|$

Μέσω των ομομορφισμών, μπορεί να χρησιμοποιεί τα μαθηματικά μέσα, πχ. τη συνολοθεωρία, για να χειρίζεται περιοχές χωροχρονικών σημείων (πρβλ. Shapiro, 2000). Αλλά η συνολοθεωρία αποτελεί γι αυτόν απλώς ένα μέσο, χάρη στο οποίο μπορεί να συναγάγει με μεγαλύτερη άνεση τις λογικές συνέπειες της νομιναλιστικά διατυπωμένης θεωρίας του. Πιστεύει βέβαια ότι οι ίδιες συνέπειες θα μπορούσαν να παραχθούν ούτως ή άλλως, και χωρίς τα μαθηματικά, δεδομένου ότι τα μαθηματικά είναι συντηρητικά πάνω στη νομιναλιστικά διατυπωμένη φυσική θεωρία του. Η οντολογία του αποτελείται μόνον από νομιναλιστικά (μη μαθηματικά) στοιχεία.

Το νομιναλιστικό πρόγραμμα του Field συνάντησε δυσκολίες σε άλλες περιοχές της φυσικής, όπως πχ. στην κβαντομηχανική. Ο διαχωρισμός του μαθηματικού λεξιλογίου από το φυσικό και η προσπάθεια εξάλειψης του μαθηματικού λεξιλογίου από την επιστημονική γλώσσα συνάντησε αντιστάσεις για τις οποίες ο Field έγραψε: «δεν γνωρίζω τον τρόπο με τον οποίο θα μπορούσε να εξαλείψει κανείς τις μαθηματικές οντότητες από όλες τις επιστημονικές εξηγήσεις» (1989, 17). Παρ' όλα αυτά, ο ίδιος πρόσφερε ένα υπόδειγμα νομιναλιστικής επαναδιατύπωσης μιας φυσικής θεωρίας, δηλαδή της νευτώνειας θεωρίας βαρύτητας, με στόχο την επέκταση του νομιναλιστικού έργου σε άλλες φυσικές θεωρίες.

Ενστάνσεις προς το πρόγραμμα του Field

Έχουν διατυπωθεί διάφορες ενστάσεις προς το νομιναλιστικό πρόγραμμα του Field. Μια τεχνική αντίρρηση προς το πρόγραμμά του και ειδικότερα την έννοια της συντηρητικότητας προέρχεται από τον Stuart Shapiro (2000). Η αντίρρηση του

Shapiro είναι ότι κατ' αρχήν τα μαθηματικά δεν είναι *συντηρητικά*, κάτι που καταρρίπτει μια βασική παραδοχή του Field. Ο Shapiro επιχειρηματολογεί με τον ακόλουθο τρόπο: Έστω η μαθηματική θεωρία S και έστω ότι είναι *συντηρητική* πάνω στη νομιναλιστικά διατυπωμένη νευτώνεια μηχανική NNM. Μπορούμε να κατασκευάσουμε στη νομιναλιστική γλώσσα μια πρόταση Gödel που να ισχυρίζεται ότι η NNM είναι συνεπής. Η εν λόγω πρόταση g δεν μπορεί να αποδειχθεί εντός της θεωρίας NNM (λόγω του Δεύτερου Θεωρήματος μη Πληρότητας του Gödel). Μπορεί όμως να αποδειχθεί εντός της S + NNM (όταν έχουμε μαθηματικοποιήσει την NNM). Τότε όμως έπεται ότι η S δεν είναι *συντηρητική* πάνω στην NNM. (Εάν η S ήταν συντηρητική πάνω στην NNM τότε κάθε νομιναλιστικά διατυπωμένη συνέπεια που παράγεται από την S + NNM θα έπρεπε να παράγεται από την NNM μόνη της).

Γενικότερα μπορούμε να υποθέσουμε ότι η *N* είναι μια νομιναλιστικά διατυπωμένη συνεπής φυσική θεωρία και η μαθηματική θεωρία *M* περιλαμβάνει τη θεωρία συνόλων και είναι *συντηρητική* επί της *N*. Εάν η *N* είναι ισχυρή στο βαθμό που ο Field υποθέτει (δηλ. έχει τη δυνατότητα να περιλαμβάνει ένα μοντέλο χωροχρόνου με μια δομή όπως η ευκλείδεια R4) τότε υπάρχουν μη αποδείξιμες αλήθειες στη *N*, επειδή η *N* θα είναι αρκετά ισχυρή ώστε να μοντελοποιήσει την αριθμητική και άρα υπόκειται στα θεωρήματα μη Πληρότητας του Gödel[4]. Αν, για παράδειγμα, η g είναι μια πρόταση Gödel στη *N* που ισχυρίζεται ότι η *N* είναι συνεπής τότε η g δεν αποδεικνύεται εντός της *N*. Μπορεί όμως να αποδειχθεί εντός της *M* + *N*. Άρα, υπάρχει μια παραγωγική συνέπεια της *M* + *N* η οποία δεν αποτελεί συνέπεια της *N* μόνης της. Επομένως η *M* δεν είναι *συντηρητική* επί της *N*.

Ο Shapiro κάνει τη διάκριση μεταξύ δύο διαφορετικών εκδοχών της συντηρητικότητας (της σημασιολογικής και της παραγωγικής). Το ποια από τις δύο εννοεί κανείς, εξαρτάται από το αν έχει στο νου του τη σημασιολογική έννοια του επακόλουθου[5] (λογικής συνέπειας) ή την παραγωγική έννοια του επακόλουθου[6]

---

[4] α) Υπάρχουν προτάσεις στην (πρωτοβάθμια γλώσσα) της θεωρίας που ούτε αυτές ούτε οι αρνήσεις τους μπορούν να αποδειχθούν στο πλαίσιο της εν λόγω θεωρίας β) η συνέπεια της θεωρίας δεν μπορεί να αποδειχθεί στο πλαίσιο και με τα μέσα της ίδιας της θεωρίας

[5] Μία πρόταση P αποτελεί το *σημασιολογικό επακόλουθο* ενός συνόλου προτάσεων Σ αν και μόνο αν είναι αληθής σε κάθε μοντέλο του συνόλου Σ (σε κάθε ερμηνεία που καθιστά τις προτάσεις του Σ αληθείς)

[6] Μία πρόταση P αποτελεί *παραγωγικό επακόλουθο* ενός συνόλου προτάσεων Σ αν και μόνο αν προκύπτει ως η τελευταία πρόταση μιας συντακτικής ακολουθίας προτάσεων (απόδειξης) από τις προτάσεις του συνόλου Σ, μέσω δεδομένων κανόνων ενός συστήματος παραγωγής

(παραγωγικής συνέπειας). Ο Field έχει χρησιμοποιήσει (στο *Science without Numbers*) λογική 2^{ης} τάξεως και αναφέρεται στη (σημασιολογική) εκδοχή της συντηρητικότητας της μαθηματικής θεωρίας *M* πάνω στις νομιναλιστικές θεωρίες. Δηλαδή εάν $N+M \models s$, τότε $N \models s$. Όταν γίνεται χρήση λογικής 2ης τάξεως η παραπάνω διάκριση είναι κρίσιμη[7] (διότι η λογική δεύτερης τάξεως δεν είναι πλήρης). Ο Field (1980) έχει διευκρινίσει ότι χρειαζόταν να επεκταθεί πέρα από τη λογική 1^{ης} τάξεως, δηλαδή ότι έπρεπε να χρησιμοποιήσει λογική 2^{ης} τάξεως[8] και ότι η εκδοχή της συντηρητικότητας που θα χρησιμοποιούσε είναι η σημασιολογική.

Σύμφωνα με τον Shapiro, η επιλογή της σημασιολογικής εκδοχής της συντηρητικότητας αντί της παραγωγικής από τον Field, ήταν μια λανθασμένη φιλοσοφική επιλογή, για δύο λόγους: α. ο Field πιστεύει ότι η χρησιμότητα των μαθηματικών οφείλεται στο γεγονός ότι παρέχουν πιο σύντομες παραγωγές από αυτές που θα γίνονταν χωρίς τα μαθηματικά. Επομένως, ο Field θα έπρεπε να είχε στο νου του την παραγωγική έννοια του επακόλουθου και άρα, την παραγωγική έννοια της συντηρητικότητας, αντί της σημασιολογικής. β. αν ο Field ενδιαφερόταν για τη σημασιολογική εκδοχή της συντηρητικότητας τότε θα έπρεπε να είναι πιο σαφής στους ισχυρισμούς του σε όλη την έκταση του νομιναλιστικού του προγράμματος για ό,τι έχει να κάνει με τη σημασιολογική εκδοχή του επακόλουθου, ώστε να καταλάβει κανείς πώς ένας νομιναλιστής κατανοεί την έννοια του σημασιολογικού επακόλουθου και γιατί δεν περιορίζεται στην έννοια του παραγωγικού επακόλουθου.

Ο Field προσπάθησε να ερμηνεύσει το *σημασιολογικό επακόλουθο* με ένα νομιναλιστικό τρόπο (χωρίς αναφορά σε μοντέλα που θεωρούνται αφηρημένα αντικείμενα). Για να αποφύγει αυτή τη δυσκολία, σε διάφορες ευκαιρίες έχει εξηγήσει ότι η λογική συνέπεια είναι γι αυτόν μια πρωταρχική (μη περαιτέρω αναλύσιμη) έννοια (primitive). Επιπλέον, ο Field (1989, 127) απάντησε στις ενστάσεις του Shapiro: ένας νομιναλιστής αντιμετωπίζει δυσκολίες προκειμένου να εξηγήσει την έννοια του σημασιολογικού επακόλουθου χωρίς να κάνει χρήση

---

[7] Η έννοια του σημασιολογικού επακόλουθου και η έννοια του παραγωγικού επακόλουθου δεν είναι ισοδύναμες στη λογική 2^{ης} τάξεως

[8] Ο Shapiro (1983) θεώρησε ότι εντός της λογικής 1ης τάξεως, τα θεωρήματα αναπαράστασης του Field δεν μπορούν να αποδειχθούν. Οι ομομορφισμοί που χρησιμοποιεί ο Field για την εφαρμογή των μαθηματικών αποτυγχάνουν.

αφηρημένων οντοτήτων (πχ. μοντέλων). Εξίσου όμως αντιμετωπίζει δυσκολίες να εξηγήσει την έννοια του παραγωγικού επακόλουθου χωρίς και πάλι να κάνει χρήση αφηρημένων οντοτήτων, δεδομένου ότι μια παραγωγή απαιτεί αφηρημένες ακολουθίες τύπων εκφράσεων και προτάσεων. Επομένως ένας νομιναλιστής δεν έχει λόγους να προτιμήσει την παραγωγική έννοια του επακόλουθου αντί της σημασιολογικής έννοιας, δεδομένου ότι και πάλι θα δεσμευόταν σε αφηρημένες οντότητες. Γι αυτό το λόγο, ο Field (όπως και κάθε νομιναλιστής) θα ήταν προτιμότερο να εξηγήσει την έννοια του επακόλουθου με όρους τροπικότητας (modally): *είναι αδύνατο οι προκείμενες να είναι αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές*. Εδώ, ωστόσο, δεν θα έπρεπε να κάνει χρήση δυνατών κόσμων ή άλλων αφηρημένων οντοτήτων γι αυτό η συγκεκριμένη προσέγγιση στην έννοια του επακόλουθου μέσω της τροπικότητας θα έπρεπε να εκληφθεί ως πρωταρχική και μη περαιτέρω αναλύσιμη. Κατά συνέπεια η απάντηση του Field είναι ότι η έννοια του επακόλουθου που χρησιμοποιεί στον ορισμό της συντηρητικότητας προσδιορίζεται τροπικά αλλά με μια πρωταρχική δηλαδή μη περαιτέρω αναλύσιμη έννοια λογικής δυνατότητας.
Διάφοροι υποστηρικτές του Field πιστεύουν ότι η πρωταρχική έννοια της συνέπειας ισοδυναμεί με μια πρωταρχική έννοια δυνατότητας. Ισχύουν οι ορισμοί:

Μία θεωρία T είναι σημασιολογικά εννοιολογικά συνεπής αν και μόνο αν η ένωση T + C της T με το σύνολο C όλων των εννοιολογικών αληθειών έχει ένα μοντέλο. Η θεωρία T είναι συντακτικά εννοιολογικά συνεπής εάν και μόνο αν δεν προκύπτει αντίφαση από την T + C σε κανένα λογικά έγκυρο παραγωγικό σύστημα.

Μια θεωρία T είναι σημασιολογικά φυσικά συνεπής αν και μόνο αν η ένωση T + P της T με το σύνολο P όλων των φυσικών νόμων έχει ένα μοντέλο. Η T είναι συντακτικά φυσικά συνεπής αν και μόνο αν δεν προκύπτει αντίφαση από την T + P σε κανένα λογικά έγκυρο παραγωγικό σύστημα.

Ο Mark Balaguer (1998) δέχεται ότι υπάρχει μια πρωταρχική (διαισθητική) έννοια λογικής δυνατότητας που αντιστοιχεί σε καθένα από τα δύο ζεύγη τυπικών εννοιών (την ονομάζει Kreisel-Field). Κάθε άλλη διαισθητική έννοια λογικής δυνατότητας θα πρέπει να ορίζεται με βάση αυτή.

Θα πρέπει να αναφερθεί επίσης μια ακόμα ένσταση προς το νομιναλιστικό πρόγραμμα του Field. Όπως είδαμε, δέχεται μια οντολογία που απαρτίζεται από χωρο-χρονικά σημεία πάνω στα οποία προσδιορίζονται και τα φυσικά μεγέθη. Παρά το γεγονός ότι ο ίδιος αντιλαμβάνεται τα χωρο-χρονικά σημεία ως φυσικές οντότητες, κάτι τέτοιο δεν μπορεί να δικαιολογηθεί επαρκώς και εγείρει κατά εύλογο τρόπο αντιρρήσεις. Ένα χωρο-χρονικό σημείο δεν έχει διαστάσεις αλλά α-διάστατα αντικείμενα δεν βρίσκονται στον φυσικό κόσμο, συνεπώς είναι δύσκολο να μην αποδώσει κανείς το χαρακτήρα του αφηρημένου στα σημεία του Field. Άλλωστε, κάθε χωροχρονικό σημείο αντιστοιχεί σε μια τετράδα πραγματικών αριθμών. Ο νομιναλισμός του Field δεν είναι συνεπής αφού αποδέχεται, έστω υπόρρητα, αφηρημένες οντότητες.

Η τροποποίηση του φιξιοναλιστικού προγράμματος από τον Balaguer

Ο Balaguer[9] έχει προτείνει μια τροποποίηση του φιξιοναλισμού του Field η οποία εξασθενίζει ως ένα βαθμό τον αντιρεαλιστικό του χαρακτήρα. Το πρόβλημα που θέτει ο Balaguer είναι το ακόλουθο: ο φιξιοναλισμός δεν απορρίπτει εξ ολοκλήρου την πραγματική ύπαρξη όλων των μη παρατηρήσιμων οντοτήτων μιας επιστημονικής θεωρίας για τον φυσικό κόσμο, αλλά ειδικά τις μαθηματικές. Απορρίπτει το πλατωνιστικό τμήμα της θεωρίας αλλά δέχεται την ύπαρξη των φυσικών οντοτήτων (παρατηρήσιμων και μη παρατηρήσιμων). Με άλλα λόγια, ο φιξιοναλισμός είναι συμβατός με τον επιστημονικό ρεαλισμό. Το πρόβλημα που προκύπτει είναι κατά πόσον ένας επιστημονικός ρεαλιστής υποχρεώνεται να δεχθεί μαζί με τις φυσικές οντότητες και τις μαθηματικές (όπως τα επιχειρήματα του *αναπόδραστου* υποστηρίζουν). Οι αληθείς επιστημονικές θεωρίες δεσμεύονται οντολογικά εξίσου στις φυσικές και τις μαθηματικές οντότητες. Η πρόκληση –γράφει ο Balaguer– για το φιξιοναλισμό είναι να προτείνει μια εναλλακτική μορφή επιστημονικού ρεαλισμού, τέτοια ώστε να είναι συνεπής με τον αντιρεαλισμό του σχετικά με τα μαθηματικά (1998, 131).

Η πρόταση που συζητά ο Balaguer καλείται *νομιναλιστικός* επιστημονικός ρεαλισμός (nominalistic scientific realism). Σύμφωνα με αυτόν, το νομιναλιστικό περιεχόμενο της εμπειρικής επιστήμης είναι το αληθές τμήμα της επιστήμης (ενδεχομένως να εμπεριέχονται κάποια σφάλματα σε αυτό, τα οποία όμως μπορούν να διορθωθούν). Από την άλλη πλευρά, το πλατωνιστικό (platonistic) περιεχόμενο

[9] Ο Balaguer στο *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics* (1998) προτείνει και εξετάζει συστηματικά μια ισχυρή θέση μαθηματικού ρεαλισμού (‘καθαρόαιμος πλατωνισμός’) όπως επίσης και μια θέση μαθηματικού νομιναλισμού, εναλλακτική προς εκείνη του Field

της επιστήμης (που αφορά τις αφηρημένες μαθηματικές οντότητες) είναι το μη αληθές (το οποίο ανήκει στο χώρο του φανταστικού). Διατυπώνει έτσι δύο θέσεις για το Νομιναλιστικό επιστημονικό ρεαλισμό:

1. Η εμπειρική επιστήμη έχει ένα καθαρά νομιναλιστικό περιεχόμενο που συλλαμβάνει την πλήρη εικόνα του φυσικού κόσμου και
2. Είναι εύλογο και χωρίς αντιφάσεις να υποστηριχθεί ότι το νομιναλιστικό περιεχόμενο της εμπειρικής επιστήμης είναι αληθές και ότι το πλατωνιστικό (platonistic)[10] περιεχόμενό της είναι φαντασιακό (fictional).

O Balaguer κάνει τη σημαντική διευκρίνιση ότι η στάση του Νομιναλιστικού επιστημονικού ρεαλισμού δεν τον υποχρεώνει να δεχθεί ότι η εμπειρική επιστήμη μπορεί να εκφραστεί με νομιναλιστικό τρόπο, δηλαδή να διατυπωθεί σε νομιναλιστική γλώσσα (η οποία αποφεύγει τις αναφορές σε αφηρημένα αντικείμενα). Δεν απαιτείται η επίτευξη του, ομολογουμένως, αρκετά φιλόδοξου στόχου του Field που ήταν η νομιναλιστική διατύπωση κάθε επιστημονικής θεωρίας.

Το κίνητρο του Balaguer είναι να δείξει ότι ο φιξιοναλισμός είναι μια θέση που μπορεί να υπερασπιστεί κάποιος αλλά όχι στη μορφή που τον υποστήριξε ο Field. Αυτό στο οποίο ο Balaguer συμφωνεί με τον Field είναι ότι απορρίπτει και αυτός τα επιχειρήματα του *αναπόδραστου*. O Balaguer πιστεύει ότι η εφαρμοσιμότητα των μαθηματικών στις εμπειρικές επιστήμες δεν συνεπάγεται ότι τα μαθηματικά είναι *αναπόδραστα*. Εάν ο Νομιναλιστικός επιστημονικός ρεαλισμός ισχύει τότε τα μαθηματικά είναι απλώς χρήσιμα στις εφαρμογές ενώ κανείς δεν είναι υποχρεωμένος να δεχθεί την ύπαρξη των μαθηματικών αντικειμένων. Τότε ο επιστημονικός ρεαλισμός θα μπορούσε να αποδεσμευτεί από τον μαθηματικό ρεαλισμό.

Ο Νομιναλιστικός επιστημονικός ρεαλισμός που εξετάζει ο Balaguer στηρίζεται στον ισχυρισμό ότι τα μαθηματικά αντικείμενα –εάν υπάρχουν- είναι αιτιακώς αδρανή. Αυτό έχει ως συνέπεια οι τιμές αληθείας του νομιναλιστικού τμήματος της εμπειρικής επιστήμης να μην επηρεάζονται από τις τιμές αληθείας του πλατωνιστικού τμήματος. Με άλλα λόγια, εάν όλα τα μαθηματικά αντικείμενα που υποτίθεται ότι υπάρχουν, εξαφανίζονταν, τότε τίποτα δεν θα άλλαζε στο φυσικό

[10] Δηλαδή το μαθηματικό (αφηρημένο)

κόσμο. Επομένως εάν μια επιστημονική θεωρία είναι αληθής τότε το νομιναλιστικό περιεχόμενό της θα παρέμενε αληθές στην περίπτωση που όλα τα μαθηματικά αντικείμενα εξαφανίζονταν. Η συμπεριφορά του φυσικού κόσμου δεν εξαρτάται σε καμιά περίπτωση από την ύπαρξη των μαθηματικών αντικειμένων. Άρα, η εικόνα που δίνει η εμπειρική επιστήμη για το φυσικό κόσμο θα μπορούσε να είναι ακριβής είτε υπάρχουν είτε δεν υπάρχουν μαθηματικά αντικείμενα.

Η υπόθεση για τον αιτιακώς αδρανή χαρακτήρα των μαθηματικών αντικειμένων υποστηρίζει τους ισχυρισμούς 1 και 2. Παρ' όλα αυτά, ο Balaguer σπεύδει να κάνει τη διευκρίνιση ότι η εμπειρική επιστήμη αποδίδει συγκεκριμένο ρόλο στα μαθηματικά (δηλαδή το ότι δεν έχουν αιτιακό ρόλο δεν σημαίνει ότι δεν έχουν καθόλου ρόλο). Για να το εξηγήσει αυτό, χρησιμοποιεί την πρόταση

(P) "Το φυσικό σύστημα S είναι 40 βαθμούς C"

Ο *αριθμός* 40 δεν παίζει κανένα αιτιακό ρόλο στη φυσική συμπεριφορά του συστήματος S. Ωστόσο, εμπλέκεται σε κάποιας μορφής σχέση με το σύστημα S , με άλλα λόγια, το σύστημα S βρίσκεται σε κάποια μη αιτιακή σχέση με τον αριθμό 40.

Ο Balaguer πιστεύει ότι η παραπάνω πρόταση δείχνει πως η εμπειρική επιστήμη περιγράφει *μεικτά* γεγονότα (φυσικά+μαθηματικά γεγονότα). Κατά συνέπεια, η αλήθεια της (P) εξαρτάται από μεικτά γεγονότα. Όμως, είναι πέραν κάθε αμφιβολίας ότι ο αριθμός 40 δεν παίζει κάποιο αιτιακό ρόλο. Αυτό κάνει τον Balaguer να υποθέσει ότι η (P) εκφράζει μεικτά γεγονότα που όμως δεν είναι θεμελιώδη. Δηλαδή, αυτά τα μεικτά (φυσικά+μαθηματικά) γεγονότα επιγίγνονται σε θεμελιώδη γεγονότα που δεν είναι μεικτά αλλά είναι απλώς φυσικά. Ενώ έχουμε ένα φυσικό γεγονός για το S και ένα πλατωνιστικό (μαθηματικό) γεγονός για τον αριθμό 40, μόνο το φυσικό γεγονός ευθύνεται για την αλήθεια της πρότασης (P). Το νομιναλιστικό περιεχόμενο της πρότασης (P) αφορά το δεδομένο φυσικό γεγονός.

Ας εξετάσουμε πιο προσεκτικά αυτό το ζήτημα. Σύμφωνα με τη σημασιολογία που ακολουθεί ο Balaguer, διαβάζουμε *κυριολεκτικά* τις επιστημονικές θεωρίες (το ίδιο ίσχυε –όπως είδαμε- και για την προσέγγιση του Field). Με αυτό το δεδομένο, οι μεικτές προτάσεις των επιστημονικών θεωριών απαιτούν μεικτούς αληθοποιητές, δηλαδή μεικτά γεγονότα που τις καθιστούν αληθείς. Μπορεί λοιπόν κάποιος να ισχυριστεί ότι εάν δεν υπάρχουν μαθηματικά αντικείμενα τότε κάτι *λείπει* από τον μεικτό αληθοποιητή και επομένως αυτό επηρεάζει την τιμή αληθείας της μεικτής πρότασης. Κάτι τέτοιο, ωστόσο, θεωρητικά θα συνιστούσε σοβαρό πρόβλημα για τον επιστημονικό ρεαλισμό ο οποίος λαμβάνει υπόψη την αλήθεια των επιστημονικών θεωριών, προκειμένου να εξηγήσει την εμπειρική επιτυχία της επιστήμης. Θα μπορούσε όμως κάποιος να αντιτάξει ότι το μαθηματικό γεγονός δεν συμβάλλει στην αλήθεια της μεικτής πρότασης. Το μαθηματικό γεγονός δεν επηρεάζει καν την τιμή αληθείας της, ακριβώς επειδή οι αριθμοί και τα άλλα μαθηματικά αντικείμενα είναι αιτιακώς αδρανή αντικείμενα.

Οι παραπάνω σκέψεις προϋποθέτουν ότι, δεδομένης μιας επιστημονικής θεωρίας, μπορούμε να διαχωρίσουμε τους ισχυρισμούς της για τα φυσικά ή συγκεκριμένα γεγονότα από τους ισχυρισμούς της για τα αφηρημένα γεγονότα. Η διάκριση μεταξύ *συγκεκριμένου* και *αφηρημένου* δεν μπορεί να είναι απολύτως ακριβής, διότι εμφανίζονται διαβαθμίσεις, παρ' όλα αυτά, κάποια χαρακτηριστικά θέτουν τη βάση για έναν διαχωρισμό. Πχ. το *αφηρημένο* είναι αιτιακώς αδρανές και δεν προσδιορίζεται χωροχρονικά. Οι αριθμοί, τα σύνολα κλπ. θεωρούνται ως υποδειγματικά αφηρημένα αντικείμενα επειδή είναι αιτιακώς αδρανή και δεν τοποθετούνται στο χωροχρόνο. Κάποια αφηρημένα αντικείμενα εξαρτώνται, ωστόσο, από φυσικά αντικείμενα ή ακόμα από άλλα αφηρημένα αντικείμενα, όπως πχ. ο άξονας περιστροφής της γης, το κέντρο βάρους ενός φυσικού συστήματος σωμάτων, η διεύθυνση μιας ευθείας. Επίσης κάποια αφηρημένα αντικείμενα έχουν ένα ιδιαίτερο status. Τα μοντέλα, όπως ο αρμονικός ταλαντωτής που προκύπτει από αφαιρέσεις (αβαρές μονοδιάστατο νήμα του εκκρεμούς κλπ.), είναι *φυσικές αφηρημένες* οντότητες, σύμφωνα με τον χαρακτηρισμό του Dummett (1991). Με άλλα λόγια, μπορούμε να δεχθούμε διάφορα είδη αφηρημένων αντικειμένων. Όταν διαχωρίζουμε το νομιναλιστικό τμήμα μιας θεωρίας από το πλατωνιστικό τμήμα της, στη βάση της προσέγγισης του Balaguer, θεωρούμε ότι το νομιναλιστικό τμήμα περιλαμβάνει τους ισχυρισμούς της για φυσικά γεγονότα ενώ το πλατωνιστικό τμήμα περιλαμβάνει τους ισχυρισμούς για μαθηματικά (αφηρημένα) γεγονότα (που μπορεί να αφορούν αριθμούς ή άλλα μαθηματικά αντικείμενα). Όμως τα μεικτά γεγονότα που ευθύνονται για τις τιμές αληθείας των προτάσεων, όπως η (P), περιλαμβάνουν επίσης αφηρημένα αντικείμενα, όπως αυτά που μόλις αναφέρθηκαν (*φυσικές αφηρημένες* οντότητες), δηλαδή αφηρημένα αντικείμενα τα οποία εξαρτώνται από φυσικά αντικείμενα και γεγονότα. Συνεπώς, η διάκριση μεταξύ του νομιναλιστικού τμήματος και του πλατωνιστικού τμήματος μιας επιστημονικής θεωρίας, έτσι όπως έχει παρουσιαστεί από τον Balaguer δεν ευσταθεί, επειδή δεν λαμβάνει υπόψη την ύπαρξη και άλλων ειδών αφηρημένων αντικειμένων με συγκεκριμένη σχέση και εξάρτηση από φυσικά γεγονότα και αντικείμενα. Τα γεγονότα που αφορούν αφηρημένα αντικείμενα αυτού του είδους συμβάλλουν στον προσδιορισμό των τιμών αληθείας μεικτών προτάσεων εξίσου με τα φυσικά γεγονότα.

Νομιναλιστική επάρκεια και η προσέγγιση του Νομιναλιστικού επιστημονικού ρεαλισμού

Η Mary Leng (2005, 77) διατύπωσε μια αρχή σύμφωνα με την οποία οτιδήποτε αφορά τις εφαρμογές μιας επιστημονικής θεωρίας (και συνακόλουθα, την εμπειρική επιτυχία της) προέρχεται μόνο από το νομιναλιστικό της περιεχόμενο (και όχι από το πλατωνιστικό), δηλαδή, μόνο από το φυσικό της περιεχόμενο και όχι από το μαθηματικό. Η Leng πιστεύει ότι δεν χρειάζεται να εξετάζουμε γεγονότα που καθιστούν αληθείς τις επιστημονικές προτάσεις, δηλαδή αληθοποιητές. Αυτό ισχύει επειδή, σύμφωνα με τη Leng, δεν είναι η αλήθεια εκείνη η οποία καθορίζει την επιτυχία των επιστημονικών θεωριών. Αυτό που εξηγεί την εμπειρική επιτυχία της επιστήμης είναι η *νομιναλιστική* της *επάρκεια*. Σύμφωνα με τη Leng, μία επιστημονική θεωρία λέγεται *νομιναλιστικά επαρκής* όταν είναι ορθή (correct) ως προς τις νομιναλιστικές συνέπειές της (συνέπειες οι οποίες δεν ποσοδεικτούν πάνω σε μαθηματικές οντότητες). Αν οι θεωρίες της επιστήμης είναι αληθείς τότε συνάγεται η ύπαρξη τόσο των μη παρατηρήσιμων φυσικών οντοτήτων όσο και των μαθηματικών οντοτήτων, διότι τα μεικτά γεγονότα που οι (αληθείς) επιστημονικές θεωρίες περιγράφουν είναι γεγονότα εξίσου φυσικά και μαθηματικά. Αλλά οι μαθηματικές οντότητες είναι αιτιακώς αδρανείς και επομένως δεν θα έπρεπε –επιχειρηματολογεί η Leng- να περιλαμβάνονται σε αιτιακές εξηγήσεις της εμπειρικής επιτυχίας των επιστημονικών θεωριών. Επομένως, το επιχείρημα για το *επιστημονικό θαύμα*[11] δεν

[11] Το "επιχείρημα του μη θαύματος" του Putnam (1975, 73) (No miracle argument): ένα επιχείρημα υπέρ του επιστημονικού ρεαλισμού, σύμφωνα με το οποίο «η μόνη φιλοσοφία που δεν καθιστά την επιτυχία της επιστήμης θαύμα είναι ο επιστημονικός ρεαλισμός» (ο οποίος δέχεται την αλήθεια των επιστημονικών θεωριών). Οι καλύτερες επιστημονικές θεωρίες μας είναι επιτυχείς διότι περιέχουν επιτυχείς προβλέψεις, εξηγήσεις των φυσικών φαινομένων με κατάλληλους και ακριβείς χειρισμούς των αιτιακών μηχανισμών που εμπλέκονται σε αυτά. Συνεπώς η καλύτερη εξήγηση γι αυτή την επιτυχία –σύμφωνα με τον επιστημονικό ρεαλισμό- είναι ότι οι καλύτερες θεωρίες μας είναι αληθείς (ή

παρέχει λόγους για την υποστήριξη της πλήρους αλήθειας (τόσο του νομιναλιστικού όσο και του πλατωνιστικού τμήματος) μιας επιστημονικής θεωρίας. Παρέχει, όμως, λόγους για την αποδοχή της *νομιναλιστικής επάρκειας* της επιστημονικής θεωρίας. Σύμφωνα με τη Leng, οι εμπειρικά επιτυχείς θεωρίες είναι οι νομιναλιστικά επαρκείς θεωρίες και ο επιστημονικός ρεαλισμός θα έπρεπε να επικαλείται τη *νομιναλιστική επάρκεια* αντί της αλήθειας. Στο άρθρο (Psillos 2010/2012), ωστόσο, ασκείται κριτική στην προσέγγιση αυτή.

Ας θυμηθούμε το διαχωρισμό μεταξύ μαθηματικών αφηρημένων οντοτήτων και μη μαθηματικών αφηρημένων οντοτήτων, στη βάση όσων αναφέρθηκαν στην προηγούμενη ενότητα. Ας θεωρήσουμε ότι τα μοντέλα (όπως πχ. ο αρμονικός ταλαντωτής), ο άξονας της γης κλπ., ανήκουν στα μη μαθηματικά αφηρημένα αντικείμενα (δηλαδή στις *φυσικές αφηρημένες* οντότητες), ενώ οι αριθμοί, τα σύνολα, οι κλάσεις κλπ. αποτελούν μαθηματικά αφηρημένα αντικείμενα. Οι *φυσικές αφηρημένες* οντότητες παίζουν έναν *εξηγητικό* ρόλο στο πλαίσιο των επιστημονικών θεωριών στο βαθμό που εξηγούν τη συμπεριφορά των φυσικών αντικειμένων. Ο αρμονικός ταλαντωτής, για παράδειγμα, εξηγεί τη συμπεριφορά ενός εκκρεμούς και τον τρόπο που η περίοδός του εξαρτάται από το μήκος του νήματος. Παίζουν επίσης έναν *ενοποιητικό* ρόλο, δεδομένου ότι υπάγουν σε έναν γενικό *τύπο*, διάφορα φυσικά αντικείμενα που παρουσιάζουν ομοιότητες στη συμπεριφορά τους. Για να διατυπωθούν γενικοί ισχυρισμοί για τα φυσικά αντικείμενα και γεγονότα, καθώς και φυσικοί νόμοι, απαιτούνται οι εν λόγω φυσικές αφηρημένες οντότητες, δηλαδή τα αφηρημένα μη μαθηματικά αντικείμενα, όπως πχ. διάφορα φυσικά, βιολογικά, χημικά κλπ. μοντέλα. Ωστόσο, πρέπει να σημειωθεί ότι τα εν λόγω φυσικά αφηρημένα αντικείμενα εμπεριέχουν μαθηματικά αφηρημένα αντικείμενα. Ειδικότερα, τα μοντέλα περιλαμβάνουν μαθηματικά αφηρημένα αντικείμενα, όπως ομάδες, σύνολα, διανυσματικούς χώρους, διαφορικές πολλαπλότητες κλπ. Αυτό είναι πολύ σημαντικό διότι ο *εξηγητικός* και *ενοποιητικός* ρόλος που αυτά παίζουν είναι τέτοιος ώστε να τα καθιστά αναγκαία (*αναπόδραστα*) για τις επιστημονικές θεωρίες, παρά το γεγονός ότι είναι αιτιακώς αδρανή. Με άλλα λόγια, ο αιτιακώς αδρανής χαρακτήρας τους δεν είναι ικανός για να θεωρηθεί λόγος απόρριψής τους. Τα εν λόγω αφηρημένα αντικείμενα είναι *αναπόδραστα* στην εμπειρική επιστήμη, λόγω της καταλληλότητάς

προσεγγιστικά αληθείς) με την έννοια ότι περιγράφουν μια ανεξάρτητη από το νου φυσική πραγματικότητα.

τους στο να συμμετέχουν σε επιστημονικές εξηγήσεις και να ενοποιούν τα φυσικά γεγονότα περιγράφοντάς τα μέσω γενικών ισχυρισμών, γενικών αποφάνσεων και νόμων.

Ένα άλλο ζήτημα που επίσης προκύπτει και μπορεί να προκαλέσει ενστάσεις προς τον Νομιναλιστικό επιστημονικό ρεαλισμό, αφορά την ίδια την έννοια της *νομιναλιστικής επάρκειας* της Leng, η οποία προαναφέρθηκε: Μια θεωρία Τ είναι νομιναλιστικά επαρκής όταν είναι ορθή ως προς τις νομιναλιστικές συνέπειές της. Δηλαδή, η θεωρία είναι νομιναλιστικά επαρκής όταν οι νομιναλιστικές της συνέπειες είναι αληθείς. Αυτή η έννοια μπορεί να προσδιοριστεί με μοντελοθεωρητικό ή συντακτικό τρόπο.

Ως προς το μοντελοθεωρητικό προσδιορισμό της έννοιας της νομιναλιστικής επάρκειας, μια θεωρία είναι νομιναλιστικά επαρκής όταν μια υποδομή ενός μοντέλου της είναι ισόμορφη με την αιτιακή δομή του κόσμου. Πρέπει ωστόσο να επισημανθεί στο σημείο αυτό ότι στο μοντελοθεωρητικό προσδιορισμό της έννοιας, παρεμβάλλονται εκ νέου αφηρημένα αντικείμενα, πχ. μοντέλα, πράγμα το οποίο δημιουργεί νέα προβλήματα στον υποστηρικτή του Νομιναλιστικού επιστημονικού ρεαλισμού. Πράγματι, η Leng (και οποιοσδήποτε υποστηρικτής του Νομιναλιστικού επιστημονικού ρεαλισμού) θα πρέπει να δικαιολογήσει το νομιναλιστικό status των μοντέλων σε αυτό το επίπεδο του ορισμού της κρίσιμης έννοιας της νομιναλιστικής επάρκειας. Κάτι τέτοιο βέβαια δεν έχει γίνει. Ας δούμε όμως το συντακτικό προσδιορισμό της νομιναλιστικής επάρκειας, σύμφωνα με τον οποίο, οι συνέπειες μιας θεωρίας εκλαμβάνονται ως συντακτικές προτάσεις. Σ' αυτή την περίπτωση, μια ακολουθία συντακτικών προτάσεων θεωρείται επίσης αφηρημένο αντικείμενο. Θα προέκυπταν, ωστόσο, και άλλου τύπου προβλήματα, δεδομένου ότι μια θεωρία παρέχει συνέπειες με τη συνεπικουρία βοηθητικών ισχυρισμών. Μία θεωρία Τ είναι νομιναλιστικά επαρκής όταν για κάθε βοηθητικό ισχυρισμό, πχ. Μ, διατυπωμένο στη μαθηματική γλώσσα, η Τ+Μ δεν παρέχει περισσότερες νομιναλιστικές συνέπειες από όσες θα προέκυπταν από την Τ μόνη της. Όμως σ' αυτή την περίπτωση, ο μόνος τρόπος για να διασφαλιστεί κάτι τέτοιο, είναι φυσικά η *συντηρητικότητα των μαθηματικών* (όπως την είχε εισαγάγει ο Field). Άρα η έννοια της νομιναλιστικής επάρκειας συνδέεται με την προβληματική που συνοδεύει την έννοια της συντηρητικότητας (για την οποία, βλ. τις σχετικές ενστάσεις σε προηγούμενη ενότητα).

Στην περίπτωση του Νομιναλιστικού επιστημονικού ρεαλισμού, προκύπτει επιπλέον ένα είδος *υποκαθορισμού*. Τότε μπορούμε να διατυπώσουμε το ακόλουθο επιχείρημα: δύο επιστημονικές θεωρίες οι οποίες έχουν το ίδιο νομιναλιστικό περιεχόμενο αλλά διαφορετικές μαθηματικές τυποποιήσεις, θεωρούνται *νομιναλιστικά ισοδύναμες*. Ας υποθέσουμε ότι δεν είναι αναγκαία αλήθεια το ότι οι μαθηματικές οντότητες δεν υπάρχουν. Έστω τότε οι θεωρίες T_1 (N + [M]) και T_2 = (N + [-M]) από τις οποίες η δεύτερη δεν αποδέχεται τις μαθηματικές αφηρημένες οντότητες και κατά συνέπεια το όλον περιεχόμενό της είναι μόνον το νομιναλιστικό περιεχόμενό της. Θα υπάρχει ωστόσο ένας δυνατός κόσμος W_1 στον οποίο οι μαθηματικές οντότητες υπάρχουν, όπου η θεωρία T_1 είναι αληθής. Σ' αυτόν τον κόσμο, η θεωρία T_2 είναι νομιναλιστικά επαρκής αλλά ταυτόχρονα ψευδής. Θα υπάρχει ωστόσο ακόμα ένας δυνατός κόσμος W_2 στον οποίο οι μαθηματικές οντότητες δεν υπάρχουν και τότε σ' αυτό τον κόσμο η θεωρία T_2 είναι αληθής. Δεν μπορεί να δοθεί όμως κάποια απάντηση από το Νομιναλιστικό επιστημονικό ρεαλισμό, στο ερώτημα κατά πόσον ο κόσμος μας είναι σαν τον κόσμο W_1 ή σαν τον κόσμο W_2. Δεδομένης της κυριολεκτικής ανάγνωσης των μαθηματικών τμημάτων των επιστημονικών θεωριών, είναι ενδεχομενικό γεγονός το κατά πόσον ο κόσμος μας είναι σαν τον κόσμο W_1 ή σαν τον W_2. Ειδικότερα, ο Νομιναλιστικός επιστημονικός ρεαλισμός δεν μπορεί να διακρίνει και να χειριστεί τις παραπάνω δυνατότητες που εκφράζονται μέσω των δυνατών κόσμων. Επίσης, το σημαντικό είναι ότι δεν μπορεί να ισχυριστεί ότι ο κόσμος μας είναι σαν τον W_2 κι ότι οι θεωρίες μας είναι ψευδείς και νομιναλιστικά επαρκείς. Κατά συνέπεια, δεδομένου ότι δεν υπάρχει επιχείρημα που να αποδεικνύει ότι οι μαθηματικές οντότητες δεν υπάρχουν, ο Νομιναλιστικός επιστημονικός ρεαλισμός οφείλει να κρατήσει μια αγνωστικιστική στάση απέναντι στο πρόβλημα της ύπαρξης των μαθηματικών οντοτήτων.

Συμπεράσματα

Σε αυτό το άρθρο, αναπτύχθηκαν οι κύριες θέσεις του φιξιοναλισμού/νομιναλισμού του Field, της περαιτέρω τροποποίησής του από τον Balaguer και της παρέμβασης της Leng μέσω της έννοιας της νομιναλιστικής επάρκειας. Ο φιξιοναλισμός/νομιναλισμός του Field επιδιώκει την εξάλειψη των μαθηματικών όρων από την επιστημονική γλώσσα και την απαλοιφή των μαθηματικών αναφορών σε αφηρημένα αντικείμενα προκειμένου να απορριφθεί ο *αναπόδραστος* χαρακτήρας των μαθηματικών οντοτήτων. Η προσπάθεια επαναδιατύπωσης των επιστημονικών θεωριών σε νομιναλιστική γλώσσα έδωσε ένα υπόδειγμα στην περίπτωση της νευτώνειας θεωρίας βαρύτητας, ωστόσο συνάντησε σημαντικές δυσκολίες κατά την επέκταση του νομιναλιστικού προγράμματος σε άλλες επιστημονικές φυσικές θεωρίες. Επιπλέον, όπως είδαμε, το νομιναλιστικό πρόγραμμα αντιμετώπισε διάφορες ενστάσεις σχετικά με τη γνησιότητα του νομιναλιστικού χαρακτήρα της γλώσσας που χρησιμοποιήθηκε, όπως επίσης και σχετικά με την έννοια της συντηρητικότητας των μαθηματικών που χρησιμοποίησε ο Field.

Στη συνέχεια, η προσέγγιση του Balaguer υπερασπίζεται την άποψη ότι δεν χρειάζεται να επαναδιατυπωθούν οι επιστημονικές θεωρίες σε νομιναλιστική γλώσσα για να υποστηριχθεί ο φιξιοναλισμός σχετικά με τα μαθηματικά αντικείμενα. Αρκεί να γίνει φανερό ότι μόνον τα φυσικά γεγονότα (και όχι γεγονότα που αφορούν αριθμούς, σύνολα και άλλα μαθηματικά αντικείμενα) καθιστούν αληθείς τις (μεικτές) προτάσεις της επιστήμης. Στην προσέγγιση αυτή, καθοριστικό ρόλο παίζει ο ισχυρισμός ότι τα μαθηματικά αντικείμενα είναι αιτιακώς αδρανή. Όμως, αυτή η εκδοχή φιξιοναλισμού δεν λαμβάνει υπόψη την παρουσία των *φυσικών αφηρημένων* αντικειμένων, πχ. μοντέλων κλπ., που παίζουν έναν ιδιαίτερο ρόλο στη συγκρότηση των επιστημονικών θεωριών και ευθύνονται για την αλήθεια των μεικτών επιστημονικών προτάσεων.

Η Leng, επίσης, εισάγει την έννοια της *νομιναλιστικής επάρκειας* για να υποστηρίξει ότι από αυτήν εξαρτάται η εμπειρική επιτυχία των επιστημών και ότι δεν χρειάζεται να αναζητήσει κανείς τους αληθοποιητές των επιστημονικών προτάσεων, προκειμένου να εξηγήσει την επιτυχία της επιστήμης. Αλλά, όπως είδαμε, και η προσέγγιση της Leng είναι επιδεκτική ενστάσεων που αφορούν την ίδια την έννοια της νομιναλιστικής επάρκειας ως τον βασικό παράγοντα δικαιολόγησης της εμπειρικής επιτυχίας της επιστήμης. Από τη συζήτηση αυτών των νομιναλιστικών θέσεων γίνεται φανερό ότι ο νομιναλισμός/φιξιοναλισμός επικαλείται κυρίως μια σημαντική διαφορά των μαθηματικών αντικειμένων από τα φυσικά αντικείμενα, τον αιτιακώς αδρανή χαρακτήρα τους. Όμως η χρήση αυτού του συγκεκριμένου χαρακτηριστικού των μαθηματικών αντικειμένων για την υποστήριξη του μη *αναπόδραστου* χαρακτήρα τους στις επιστημονικές μας θεωρίες δεν επιτυγχάνει το στόχο της. Οι εν λόγω προσεγγίσεις δεν λαμβάνουν υπόψη τον ενοποιητικό και εξηγητικό ρόλο που παίζουν για την επιστήμη, οι φυσικές αφηρημένες οντότητες οι οποίες περιλαμβάνουν καθαρά μαθηματικά αφηρημένα αντικείμενα. Αν ο αιτιακώς αδρανής χαρακτήρας όλων αυτών των αφηρημένων αντικειμένων δεν είναι επαρκής λόγος για να βεβαιώσει τον ισχυρισμό του μη *αναπόδραστου*, τότε δεν δικαιολογείται η απόρριψη της ύπαρξή τους. Δεν έχουμε, δηλαδή, ισχυρούς λόγους για να δεχθούμε μια νομιναλιστική θέση.

Τα μαθηματικά αντικείμενα συμβάλλουν με αναγκαίο τρόπο στις *εξηγήσεις* των επιστημονικών φαινομένων, συμμετέχοντας κατά *αναπόδραστο τρόπο*, μέσα σε άλλα είδη αφηρημένων αντικείμενων, στενά συνδεδεμένων με φυσικά γεγονότα, έτσι ώστε να καθιστούν δυνατή την *ενοποίηση* των φυσικών φαινομένων και την υπαγωγή τους σε γενικές εξηγήσεις, γενικούς νόμους και θεωρίες.

This research has been co-financed by the European Union (European Social Fund – ESF) and Greek national funds through the Operational Program “Education and Lifelong Learning” of the National Strategic Reference Framework (NSRF) – Research Funding Program: THALIS-UOA-Aspects and Prospects of Realism in the Philosophy of Science and Mathematics (APRePoSMa).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Balaguer, M. (1998) *Realism and Anti-Realism in Mathematics,* Oxford, Oxford University Press

Dummett, M. (1991) *Frege : philosophy of mathematics*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press

Frege, G. Frege, G. (1884) *Die Grundlagen der Arithmetik,* Breslau, W. Koebner. Αγγλική μετάφραση: *The Foundations of Arithmetic* (Trans. by John L. Austin), Oxford, Blackwell, 1953.

Field, H. (1980) *Science without Numbers*, Princeton, N.J.: University Press

Field, H. (1989) *Realism, Mathematics and Modality*, Oxford, Cambridge, Blackwell

Leng, M.C. (2005) "Platonism and anti-platonism: Why worry?" *International Studies in the Philosophy of Science*, 19 (1), 65-84

Psillos, S. (2012) "Anti-Nominalistic Scientific Realism: A Defense" in Alexander Bird, Brian Ellis, and Howard Sankey (eds) *Properties, Powers and Structures: Issues in the Metaphysics of Realism* (Routledge), 53-69

Putnam, H. (1975) *Mind, Language and Reality. Philosophical Papers, vol. 2*. Cambridge, Cambridge University Press

Shapiro, S. (1983) "Conservativeness and Incompleteness", *Journal of Philosophy*, 80, 521-531

Shapiro, S. (2000) *Thinking about Mathematics*, Oxford, Oxford University Press